第0章 预备知识

0.1 引言

随机过程是指随着时间变化的随机的过程. 更精确地说，随机过程是一族以时间作为参数的随机变量 X_t. 在本书中，时间一般是非负整数集合 $\{0,1,2,\cdots\}$ 的子集，或者是非负实数 $[0, \infty)$ 的子集. 我们称第一种情形为离散时间过程；第二种情形为连续时间过程. 随机变量 X_t 取值于一个集合，此集合称为状态空间. 我们将会讨论状态空间为离散（即有限集或可数无限集）和状态空间为连续（即实数集 $\mathbf{R}$ 或 d 维空间 $\mathbf{R}^d$）两种情形.

为了研究随时间变化的确定性（非随机）过程，需要对微分方程（若时间是连续的）或差分方程（若时间是离散的）进行研究. 一个典型（一阶）微分方程具有如下的形式：

$$y'(t) = F(t, y(t)).$$

这里函数 $y(t)$ 的变化只依赖于 t 和 $y(t)$ 的取值，而与 t 之前的值无关. 有一大类随机过程也具有这样的性质：在 t 处的变化仅取决于过程在时刻 t 的值，而与时刻 t 之前的值无关. 这类过程称为马尔可夫过程. 对于这类过程的研究，必须掌握线性代数、微分方程、差分方程等方面的知识. 学习本书的读者需对线性代数比较熟悉. 而在接下来的两节中，我们将分别回顾一些要使用到的线性微分方程和线性差分方程中的内容.

0.2 线性微分方程

这里我们简要回顾一下常系数齐次线性微分方程的一些内容. 要想了解更多细节，读者可以参考任何一本有关微分方程的入门教材. 1[1]

考虑齐次微分方程：

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0, \tag{0.1}$$

其中 $a_0, a_1, \cdots a_{n-1}$ 为常数. 对任一给定的初值条件：

$$y(0) = b_0, y'(0) = b_1, \cdots, y^{(n-1)}(0) = b_{n-1},$$

方程（0.1）存在唯一的解满足这一初值条件. 为求得这样的一个特解，我们可以先求出方程的通解. 假设 $y_1(t), \cdots, y_n(t)$ 是方程（0.1）的 n 个线性无关解，则方程的任一解均可以写为：

$$y(t) = c_1 y_1(t) + \cdots + c_n y_n(t), \quad c_1, \cdots, c_n \text{ 为常数}.$$

根据给定的初值条件，我们可以确定这些常数.

方程的解 $y_1, \cdots, y_n$ 可以通过寻找具有形式 $y(t) = e^{\lambda t}$ 的解来得到. 我们发现函数 $y(t)$ 要满足方程（0.1）当且仅当

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

若上述多项式有 n 个不同的根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，我们就能得到 n 个线性无关解 $e^{\lambda_1 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}$. 出现重根的情况相对复杂一点，但经过一点计算就会发现：如果 λ 是重数为 j 的根，则 $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \cdots,$

[1] 书中边栏页码与英文原书页码一致. ——编辑注

$t^{j-1}e^{\lambda t}$ 都是解．因此对重数为 j 的根，就可以得到 j 个线性无关解，将所有的解合并在一起，我们同样可以得到所需的 n 个线性无关解．

接下来考虑一阶线性方程组：

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= a_{11}y_1(t)+a_{12}y_2(t)+\cdots+a_{1n}y_n(t) \\ y_2'(t) &= a_{21}y_1(t)+a_{22}y_2(t)+\cdots+a_{2n}y_n(t) \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= a_{n1}y_1(t)+a_{n2}y_2(t)+\cdots+a_{nn}y_n(t). \end{aligned}$$

也可以将上面的线性微分方程组写成向量形式：

$$\overline{y}'(t) = \boldsymbol{A}\,\overline{y}(t),$$

其中 $\overline{y}(t)=[y_1(t),\cdots,y_n(t)]$（更确切地说，是这一向量的转置），$\boldsymbol{A}$ 是系数（a_{ij}）的矩阵．对于任一给定的初值向量 $\overline{v}=(v_1,\cdots,v_n)$，方程都存在唯一的解满足 $\overline{y}(0)=\overline{v}$，且该解可以很容易地写成矩阵的指数形式：

$$\overline{y}(t) = e^{t\boldsymbol{A}}\,\overline{v}.$$

其中 $e^{t\boldsymbol{A}}$ 定义为如下幂级数的形式：

$$e^{t\boldsymbol{A}} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(t\boldsymbol{A})^j}{j\,!}.$$

为了便于计算，一般可以将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对角化．设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}$，其中 $\boldsymbol{D}$ 为某一对角阵：

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}.$$

则

$$e^{t\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{Q}^{-1}e^{t\boldsymbol{D}}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{-1}\begin{bmatrix} e^{td_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{td_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{td_n} \end{bmatrix}\boldsymbol{Q}.$$

但是实际上，并不是每一个矩阵都能像上面那样对角化．不过对任意的矩阵 $\boldsymbol{A}$，都可以写成 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{J}\boldsymbol{Q}$ 的形式，其中 $\boldsymbol{J}$ 为若尔当（Jordan）标准型．求若尔当标准型的指数形式比求对角矩阵的指数形式要稍微困难一些．要了解更多细节，可以参阅任意一本线性代数的教材．

0.3　线性差分方程

线性差分方程理论非常类似于线性微分方程．然而，由于差分理论在一般介绍微分方程的课程中并不考虑，且差分方程又会在离散时间马尔可夫链的研究中自然出现，所以在这里我们要比较详细地讨论关于这类方程的解的情况．首先考虑方程

$$f(n) = af(n-1)+bf(n+1),K<n<N. \tag{0.2}$$

其中 $f(n)$ 是定义在整数集 $K\leqslant n\leqslant N$（N 可取 ∞）上的函数，且 a，b 均为非零实数．若 f 满足方程（0.2），且已知 $f(K)$ 和 $f(K+1)$ 的值，则 $f(n)$ 在 $K\leqslant n\leqslant N$ 上的值可以通过下面

的递归公式逐一求出：

$$f(n+1)=\frac{1}{b}[f(n)-af(n-1)]. \tag{0.3}$$ 3

反之，若 u_0，u_1 为任意实数，由递归式（0.3）可以定义 $f(n)$ 来求得方程（0.2）的一个解，满足 $f(K)=u_0$，$f(K+1)=u_1$. 同时注意到满足（0.2）的函数集合构成一个向量空间，即若 f_1，f_2 满足（0.2），则 $c_1f_1+c_2f_2$ 也同样满足该方程，其中 c_1，c_2 为任意实数，这一向量空间的维数为 2；实际上，此向量空间的一组基 $\{f_1, f_2\}$ 可以这样得到：f_1 是 $f_1(K)=1$，$f_1(K+1)=0$ 的解，f_2 是 $f_2(K)=0$，$f_2(K+1)=1$ 的解. 如果 g_1，g_2 是任意两个线性无关解，根据线性代数的一般知识可知，任一解都可以写成 $c_1g_1+c_2g_2$ 的形式，其中 c_1，c_2 为常数.

为了找到一对线性无关解，我们不妨做如下猜想：考虑函数 $f(n)=\alpha^n$，$\alpha\neq0$. $f(n)$ 是方程（对于特定的 α）的解当且仅当

$$\alpha^n=a\alpha^{n-1}+b\alpha^{n+1}, K<n<N,$$

即

$$\alpha=a+b\alpha^2.$$

根据二次函数的求解公式可以求得

$$\alpha=\frac{1\pm\sqrt{1-4ab}}{2b}.$$

第Ⅰ种情况： $1-4ab\neq0$. 在这种情况下，α 有两个不同根 α_1、α_2，从而可以得到通解

$$f(n)=c_1\alpha_1^n+c_2\alpha_2^n. \tag{0.4}$$

第Ⅱ种情况： $1-4ab=0$. 此时只求得一个解 $g_1(n)=\alpha^n=\left(\frac{1}{2b}\right)^n$. 不过如果令 $g_2(n)=n\left(\frac{1}{2b}\right)^n$，则

$$\begin{aligned}ag_2(n-1)+bg_2(n+1)&=a(n-1)\left(\frac{1}{2b}\right)^{n-1}+b(n+1)\left(\frac{1}{2b}\right)^{n+1}\\&=\left(\frac{1}{2b}\right)^n\left[a(n-1)2b+\frac{b(n+1)}{2b}\right]\\&=\left(\frac{1}{2b}\right)^n n=g_2(n).\end{aligned}$$

因此，$g_2(n)$ 也是方程的解. 容易验证 g_1，g_2 是线性无关的，所以任一解都可以表示成如下形式：

$$f(n)=c_1\left(\frac{1}{2b}\right)^n+c_2n\left(\frac{1}{2b}\right)^n.$$

例 设函数 f 满足

$$f(n)=\frac{1}{6}f(n-1)+\frac{2}{3}f(n+1),\quad 0<n<\infty,$$ 4

且 $f(0)=4$，$f(1)=3$. 此时我们将系数代入 α 表达式，得到

$$\alpha=\frac{3\pm\sqrt{5}}{4}.$$

从而通解为

$$f(n)=c_1\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right)^n+c_2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)^n.$$

代入初值条件，得到

$$4=f(0)=c_1+c_2,$$

$$3=f(1)=c_1\frac{3+\sqrt{5}}{4}+c_2\frac{3-\sqrt{5}}{4}.$$

求解得 $c_1=2$，$c_2=2$，从而

$$f(n)=2\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right)^n+2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)^n.$$

到这里已经看出，(0.2) 的解由 $f(K)$ 和 $f(K+1)$ 的值唯一确定. 但是在某些情况下，已知的可能是边界值 $f(K)$ 和 $f(N)$，对于这样的边值问题，也可以用同样的方法求得——先找到方程的通解，之后解出系数. 例如，设 f 满足

$$f(n)=2f(n-1)-f(n+1),\quad 0<n<10,$$

$f(0)=0$，$f(10)=1$. 可以写出方程的通解为 $f(n)=c_1 1^n+c_2(-2)^n$，代入初值条件有

$$f(0)=0=c_1+c_2,$$

$$f(10)=1=c_1+c_2(-2)^{10},$$

解得 $c_1=-c_2=\frac{1}{1-2^{10}}$.

考虑研究随机游动时得出的差分方程

$$f(n)=(1-p)f(n-1)+pf(n+1),\quad p\in(0,1).$$

如果 $p\neq\frac{1}{2}$，则可以得到两个根 $\alpha_1=1$，$\alpha_2=\frac{(1-p)}{p}$，从而通解为

$$f(n)=c_1+c_2\left(\frac{1-p}{p}\right)^n. \tag{0.5}$$

如果 $p=\frac{1}{2}$，得到唯一的根 $\alpha=1$，从而通解为

$$f(n)=c_1+c_2n. \tag{0.6}$$

以上分析的是二阶线性差分方程，而一般的 k 阶齐次线性差分方程具有如下形式：

$$f(n+k)=a_0f(n)+a_1f(n+1)+\cdots+a_{k-1}f(n+k-1). \tag{0.7}$$

对于 $n\geqslant 0$，假设我们希望找到满足方程 (0.7) 的函数，只要知道 $f(0),\cdots,f(k-1)$，就可以由递归公式推得 $f(n)$ $(n\geqslant k)$. 同样我们考虑具有 $f(n)=\alpha^n$ 这一形式的解，则 f 是方程的解当且仅当

$$\alpha^k=a_0+a_1\alpha+\cdots+a_{k-1}\alpha^{k-1}.$$

类似地，若方程有 k 个不同根，我们就能得到 k 个线性无关解；若出现 j 重根 α，则不难验证

$$\alpha^n,n\alpha^n,n^2\alpha^n,\cdots,n^{j-1}\alpha^n$$

是所有线性无关解. 根据与线性微分方程完全平行的理论，我们可以得到方程 (0.7) 的 k 个线性无关解. 由这些解的线性组合我们就能求出方程的所有解.

0.4 习题

0.1 求解满足如下方程组的所有函数 $x(t)$，$y(t)$：

$$x'(t) = y(t) - x(t),$$
$$y'(t) = 3x(t) - 3y(t).$$

并求出满足条件 $x(0)=y(0)=\frac{1}{2}$ 的特解.

0.2 求解 $f(n)$，$n=0,1,\cdots,10$，使其满足 $f(n)=\frac{1}{4}f(n-1)+\frac{3}{4}f(n+1)$，$n=1,2,\cdots,9$，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$. 6

0.3 斐波那契（Fibonacci）数列 F_n 定义为：$F_1=1$，$F_2=1$，$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$，$n>2$. 通过求解这一差分方程找到 F_n 的表达式.

0.4 求解 $f(n)$，$n=0,1,2,\cdots$，使其满足

$$f(0) = 0,$$
$$f(n) = \frac{1}{3}f(n-1) + \frac{1}{3}f(n+1) + \frac{1}{3}f(n+2), n \geqslant 1,$$
$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 1.$$

0.5 求解定义在整数集的实值函数 f，使得

$$f(n) = \frac{1}{2}f(n+1) + \frac{1}{2}f(n-1) - 1. \qquad (0.8)$$

[提示：首先证明 $f(n)=n^2$ 满足（0.8），之后假设 $f_1(n)$，$f_2(n)$ 均满足（0.8），求出 $g(n)=f_2(n)-f_1(n)$ 所满足的方程.]

0.6 (a) 求解定义在实数集上的实值函数 f，使得对所有的 x，

$$f''(x) + f'(x) + f(x) = 0.$$

(b) 求解定义在整数集上的实值函数 f，使得对所有的 n，

$$f(n+2) = -f(n) - f(n+1).$$ 7