第2章 基本概念

本章介绍时间序列模型理论中的基本概念．特别地，我们介绍了随机过程、均值、协方差函数、平稳过程和自相关函数等概念．

2.1 时间序列与随机过程

随机变量序列 $\{Y_t: t=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\}$ 称为一个**随机过程**，并以之作为观测时间序列的模型．已知该过程完整的概率结构是由所有 Y 的有限联合分布构成的分布族决定的．幸运的是，联合分布中的大部分信息可以通过均值、方差和协方差加以描述，我们无需直接处理这些多元分布．因此，我们将把注意力集中在对一阶和二阶矩的研究上．（如果 Y 的联合分布是多元正态分布，则所有的联合分布都可以由一阶和二阶矩完全确定．）

2.2 均值、方差和协方差

对随机过程 $\{Y_t: t=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\}$，**均值函数**定义如下：

$$\mu_t = E(Y_t), t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{2.2.1}$$

即 μ_t 恰是过程在 t 时刻的期望值．一般地，不同时刻 μ_t 可取不同的值．

自协方差函数 $\gamma_{t,s}$ 定义如下：

$$\gamma_{t,s} = \operatorname{Cov}(Y_t, Y_s), t, s = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{2.2.2}$$

其中 $\operatorname{Cov}(Y_t, Y_s)=E[(Y_t-\mu_t)(Y_s-\mu_s)]=E(Y_tY_s)-\mu_t\mu_s$．

自相关函数 $\rho_{t,s}$ 由下式给出：

$$\rho_{t,s} = \operatorname{Corr}(Y_t, Y_s), t, s = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{2.2.3}$$

其中

$$\operatorname{Corr}(Y_t, Y_s) = \frac{\operatorname{Cov}(Y_t, Y_s)}{\sqrt{\operatorname{Var}(Y_t)\operatorname{Var}(Y_s)}} = \frac{\gamma_{t,s}}{\sqrt{\gamma_{t,t}\gamma_{s,s}}} \tag{2.2.4}$$

在附录 A 中，我们回顾了期望、方差、协方差和相关的基本性质．

回忆下述结论，协方差和相关系数都是随机变量间（线性）相关关系的度量，而某种程度上无量纲的相关系数更容易理解，那么从已知的结果及前述定义，可得如下的重要性质：

$$\left.\begin{array}{ll} \gamma_{t,t} = \operatorname{Var}(Y_t) & \rho_{t,t} = 1 \\ \gamma_{t,s} = \gamma_{s,t} & \rho_{t,s} = \rho_{s,t} \\ |\gamma_{t,s}| \leqslant \sqrt{\gamma_{t,t}\gamma_{s,s}} & |\rho_{t,s}| \leqslant 1 \end{array}\right\} \tag{2.2.5}$$

$\rho_{t,s}$的值接近± 1时，说明（线性）相关程度强，而接近 0 时，则说明（线性）相关程度弱．若 $\rho_{t,s}=0$，则称 Y_t 和 Y_s 不相关．

在研究不同时间序列模型协方差的性质时，反复用到如下结论：如果 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 和 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 表示常数，$t_1, t_2, \cdots, t_m$ 和 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 表示时点，则有：

$$\operatorname{Cov}\left[\sum_{i=1}^{m} c_i Y_{t_i}, \sum_{j=1}^{n} d_j Y_{s_j}\right] = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_i d_j \operatorname{Cov}(Y_{t_i}, Y_{s_j}) \tag{2.2.6}$$

虽然方程（2.2.6）证明繁琐，但仅仅是直接应用了期望的线性性质．作为它的一个特例，可得如下为人熟知的结果：

$$\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} c_i Y_{t_i}\right] = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \mathrm{Var}(Y_{t_i}) + 2\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} c_i c_j \mathrm{Cov}(Y_{t_i}, Y_{t_j}) \tag{2.2.7}$$

随机游动

令 e_1，e_2，…为均值为 0，方差是 σ_e^2 的独立同分布的随机变量序列，观测时间序列 $\{Y_t: t=1, 2, \cdots\}$ 构造如下：

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= e_1 \\ Y_2 &= e_1 + e_2 \\ &\vdots \\ Y_t &= e_1 + e_2 + \cdots + e_t \end{aligned}\right\} \tag{2.2.8}$$

也可写成：

$$Y_t = Y_{t-1} + e_t \tag{2.2.9}$$

其“初始条件”$Y_1=e_1$．如果把 e 解释为沿数轴（前向或后向）游动的“步长”的大小，那么 Y_t 就是在时刻 t，“漫步者”到达的位置．根据方程（2.2.8），得到均值函数：

$$\mu_t = E(Y_t) = E(e_1 + e_2 + \cdots + e_t) = E(e_1) + E(e_2) + \cdots + E(e_t) = 0 + 0 + \cdots + 0$$

因而，对所有的 t，

$$\mu_t = 0 \tag{2.2.10}$$

还可以得到：

$$\mathrm{Var}(Y_t) = \mathrm{Var}(e_1 + e_2 + \cdots + e_t) = \mathrm{Var}(e_1) + \mathrm{Var}(e_2) + \cdots + \mathrm{Var}(e_t) = \sigma_e^2 + \sigma_e^2 + \cdots + \sigma_e^2$$

故有

$$\mathrm{Var}(Y_t) = t\sigma_e^2 \tag{2.2.11}$$

注意随机过程的方差随时间线性地增长．

为了了解协方差函数，假设 $1 \leqslant t \leqslant s$，那么可以得到：

$$\gamma_{t,s} = \mathrm{Cov}(Y_t, Y_s) = \mathrm{Cov}(e_1 + e_2 + \cdots + e_t, e_1 + e_2 + \cdots + e_t + e_{t+1} + \cdots + e_s)$$

由方程（2.2.6），我们有：

$$\gamma_{t,s} = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t} \mathrm{Cov}(e_i, e_j)$$

但是，除了 $i=j$ 以外，协方差都为 0．当 $i=j$ 时，协方差等于 $\mathrm{Var}(e_i)=\sigma_e^2$．这样的项恰有 t 个，因此 $\gamma_{t,s}=t\sigma_e^2$．

因为 $\gamma_{t,s}=\gamma_{s,t}$，故在所有时点 t 和 s 上，可以确定自协方差函数，记为：

$$\gamma_{t,s} = t\sigma_e^2, \quad 1 \leqslant t \leqslant s \tag{2.2.12}$$

易得随机游动的自相关函数为：

$$\rho_{t,s} = \frac{\gamma_{t,s}}{\sqrt{\gamma_{t,t}\gamma_{s,s}}} = \sqrt{\frac{t}{s}}, \quad 1 \leqslant t \leqslant s \tag{2.2.13}$$

下面的数值有助于对随机游动行为的理解．

$$\rho_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0.707 \qquad \rho_{8,9} = \sqrt{\frac{8}{9}} = 0.943$$

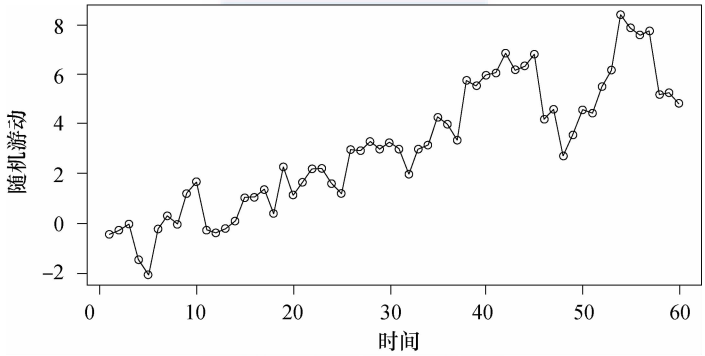
$$\rho_{24,25} = \sqrt{\frac{24}{25}} = 0.980 \qquad \rho_{1,25} = \sqrt{\frac{1}{25}} = 0.200$$

随着时间的推移，相邻时点上 Y 值的正相关程度越来越强，而另一方面，对时点相距遥远的 Y 值，其相关程度越来越弱.

一个模拟的随机游动见图表 2-1，其中 e 采样自某标准正态分布. 值得注意的是，尽管在所有时点上，理论均值函数值均为 0，但方差随时间增长，并且过程在相邻时点上的取值间的相关系数接近 1，这些事实说明，应预期该过程将会在远离零均值水平处游弋.

对于从普通的股票价格波动，到液体中悬浮微粒的位置所谓的布朗运动等分布领域广泛的众多现象而言，简单的随机游动过程提供了一个很好的模型（至少在首次逼近的意义上）.

图表 2-1　随机游动时间序列图




```
> win.graph(width=4.875, height=2.5,pointsize=8)
> data(rwalk) # rwalk contains a simulated random walk
> plot(rwalk,type='o',ylab='Random Walk')
```

滑动平均

举第二个例子，假设 $\{Y_t\}$ 构造如下：

$$Y_t = \frac{e_t + e_{t-1}}{2} \tag{2.2.14}$$

其中（本书均采用同样的假定）假设 e 均值为 0，方差是 σ_e^2，独立同分布. 这里：

$$\mu_t = E(Y_t) = E\left\{\frac{e_t + e_{t-1}}{2}\right\} = \frac{E(e_t) + E(e_{t-1})}{2} = 0$$

$$\mathrm{Var}(Y_t) = \mathrm{Var}\left\{\frac{e_t + e_{t-1}}{2}\right\} = \frac{\mathrm{Var}(e_t) + \mathrm{Var}(e_{t-1})}{4} = 0.5\sigma_e^2$$

并且，

$$\mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-1}) = \mathrm{Cov}\left\{\frac{e_t + e_{t-1}}{2}, \frac{e_{t-1} + e_{t-2}}{2}\right\}$$

$$= \frac{\mathrm{Cov}(e_t, e_{t-1}) + \mathrm{Cov}(e_t, e_{t-2}) + \mathrm{Cov}(e_{t-1}, e_{t-1})}{4} + \frac{\mathrm{Cov}(e_{t-1}, e_{t-2})}{4}$$

$$= \frac{\mathrm{Cov}(e_{t-1}, e_{t-1})}{4} \quad (\text{因为其他所有的协方差为 } 0)$$

$$= 0.25\sigma_e^2$$

或者对所有的 t，

$$\gamma_{t,t-1} = 0.25\sigma_e^2 \tag{2.2.15}$$

进一步，有

$$\mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-2}) = \mathrm{Cov}\left\{\frac{e_t + e_{t-1}}{2}, \frac{e_{t-2} + e_{t-3}}{2}\right\} = 0 \quad (\text{因为 } e \text{ 相互独立})$$

类似地，对 $k>1$，$\mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-k})=0$，因此可以写为：

$$\gamma_{t,s} = \begin{cases} 0.5\sigma_e^2 & |t-s| = 0 \\ 0.25\sigma_e^2 & |t-s| = 1 \\ 0 & |t-s| > 1 \end{cases}$$

对自相关函数，有：

$$\rho_{t,s} = \begin{cases} 1 & |t-s| = 0 \\ 0.5 & |t-s| = 1 \\ 0 & |t-s| > 1 \end{cases} \tag{2.2.16}$$

这是因为 $0.25\sigma_e^2/0.5\sigma_e^2=0.5$.

注意 $\rho_{2,1}=\rho_{3,2}=\rho_{4,3}=\rho_{9,8}=0.5$. 无论何时出现，间隔一个单位时间的 Y 值之间具有完全相同的相关系数. 此外，$\rho_{3,1}=\rho_{4,2}=\rho_{t,t-2}$，并且更一般地，对所有的 t，都有 $\rho_{t,t-k}$ 相等. 这就引出了一个重要的平稳性的概念.

2.3 平稳性

根据观测记录对随机过程的结构进行统计推断时，通常必须对其做出某些简化的（大致合理的）假设，其中最重要的假设即是**平稳性**. 平稳性的基本思想是，决定过程特性的统计规律不随着时间的变化而变. 从一定意义上说，过程位于统计的平衡点上. 特别地，如果对一切时滞 k 和时点 t_1，t_2，…，t_n，都有 Y_{t_1}，Y_{t_2}，…，Y_{t_n} 与 Y_{t_1-k}，Y_{t_2-k}，…，Y_{t_n-k} 的联合分布相同，则称过程 $\{Y_t\}$ 为**严平稳的**.

因此当 $n=1$ 时，对一切 t 和 k，Y_t 的（单变量）分布与 Y_{t-k} 的相同，换言之，Y 具有相同的（边际）分布. 进而，对一切 t 和 k，有 $E(Y_t)=E(Y_{t-k})$，因此均值函数恒为常数. 另外，对所有 t 和 k，有 $\mathrm{Var}(Y_t)=\mathrm{Var}(Y_{t-k})$，因而方差也恒为常数.

在平稳性的定义中，令 $n=2$，则可看出 Y_t 和 Y_s 的二元分布必与 Y_{t-k} 和 Y_{s-k} 的二元分布相同，从而对一切 t，s 和 k 有 $\mathrm{Cov}(Y_t, Y_s)=\mathrm{Cov}(Y_{t-k}, Y_{s-k})$. 令 $k=s$，再令 $k=t$，则有：

$$\gamma_{t,s} = \mathrm{Cov}(Y_{t-s}, Y_0) = \mathrm{Cov}(Y_0, Y_{s-t}) = \mathrm{Cov}(Y_0, Y_{|t-s|}) = \gamma_{0,|t-s|}$$

即 Y_t 和 Y_s 的协方差对于时间的依赖只与时间间隔 $|t-s|$ 有关，而与实际的时刻 t 和 s 无关. 因此对平稳过程可以简化符号，记为：

$$\gamma_k = \mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-k}), \quad \rho_k = \mathrm{Corr}(Y_t, Y_{t-k}) \tag{2.3.1}$$

再注意到

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

方程（2.2.5）给出的一般性质即成为：

$$\left.\begin{array}{ll}\gamma_0 = \mathrm{Var}(Y_t) & \rho_0 = 1 \\ \gamma_k = \gamma_{-k} & \rho_k = \rho_{-k} \\ |\gamma_k| \leqslant \gamma_0 & |\rho_k| \leqslant 1\end{array}\right\} \tag{2.3.2}$$

如果一个过程是严平稳的，并且具有有限方差，那么协方差函数一定只依赖于时间的滞后长度.

一个类似严平稳但在数学上更弱些的定义如下：一个随机过程 $\{Y_t\}$ 称为**弱**（或者**二阶矩**）**平稳**的条件是：

1. 均值函数在所有时间上恒为常数.
2. $\gamma_{t,t-k}=\gamma_{0,k}$，对所有的时间 t 和滞后 k.

在本书中，每当单独提及平稳概念时，通常指的都是弱平稳. 但是，如果过程的联合分布族都是多元正态分布，那么可以证明这两个定义是一致的. 对平稳过程，通常只考虑 $k\geqslant 0$.

白噪声

平稳过程中一个很重要的例子是所谓的**白噪声**过程，定义为独立同分布的随机变量序列 $\{e_t\}$. 其重要性并非源自它是有趣的模型，而是因为许多有用的过程可由白噪声过程构造出来. 显见 $\{e_t\}$ 是严平稳的，因为：

$$\begin{aligned}&\Pr(e_{t_1}\leqslant x_1, e_{t_2}\leqslant x_2,\cdots,e_{t_n}\leqslant x_n)\\ =&\Pr(e_{t_1}\leqslant x_1)\Pr(e_{t_2}\leqslant x_2)\cdots\Pr(e_{t_n}\leqslant x_n) \quad （根据独立性）\\ =&\Pr(e_{t_1-k}\leqslant x_1)\Pr(e_{t_2-k}\leqslant x_2)\cdots\Pr(e_{t_n-k}\leqslant x_n) \quad （同分布）\\ =&\Pr(e_{t_1-k}\leqslant x_1, e_{t_2-k}\leqslant x_2,\cdots,e_{t_n-k}\leqslant x_n) \quad （根据独立性）\end{aligned}$$

正如定义的要求. 再有，$\mu_t=E(e_t)$ 是常数，且

$$\gamma_k = \begin{cases}\mathrm{Var}(e_t) & k=0\\ 0 & k\neq 0\end{cases}$$

另外还可以写成：

$$\rho_k = \begin{cases}1 & k=0\\ 0 & k\neq 0\end{cases} \tag{2.3.3}$$

白噪声这一术语来自于如下的事实，即对模型的频域分析表明，与白光的情形类似，模型中平等地包含了所有的频率. 我们通常假设白噪声过程具有 0 均值，且记方差 $\mathrm{Var}(e_t)$ 为 σ_e^2.

2.2 节滑动平均的例子（其中 $Y_t=(e_t+e_{t-1})/2$）是又一例用白噪声构造的平稳过程. 这里用新的符号表示该滑动平均过程为

$$\rho_k = \begin{cases}1 & k=0\\ 0.5 & |k|=1\\ 0 & |k|\geqslant 2\end{cases}$$

随机余弦波

这里举一个稍有不同的例子[㊀]，考虑如下定义的一个过程：

$$Y_t = \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{12}+\Phi\right)\right] \qquad t=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

其中的 Φ（一次性的）选自区间 0 到 1 上的均匀分布．由于 Y_t 每经过 12 个时间单位等值重复自身一次，所以得自该过程的样本会显出高度的确定性，并且看似一个完美的（离散时间）余弦曲线．但是，过程的最大值并不发生在 $t=0$ 时，而是由随机相位 Φ 决定．相位 Φ 可解释为到 $t=0$ 时刻，一个完整的循环已完成的部分．该过程的统计性质可计算如下：

$$E(Y_t) = E\left\{\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{12}+\Phi\right)\right]\right\} = \int_0^1 \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{12}+\phi\right)\right]\mathrm{d}\phi = \frac{1}{2\pi}\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{12}+\phi\right)\right]\Bigg|_{\phi=0}^{1}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\sin\left(2\pi\frac{t}{12}+2\pi\right)-\sin\left(2\pi\frac{t}{12}\right)\right]$$

但因为正弦值相等，所以上式等于 0．因此对所有时间 t，$\mu_t=0$．

同时，

$$\begin{aligned}
\gamma_{t,s} &= E\left\{\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{12}+\Phi\right)\right]\cos\left[2\pi\left(\frac{s}{12}+\Phi\right)\right]\right\}\\
&= \int_0^1 \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{12}+\phi\right)\right]\cos\left[2\pi\left(\frac{s}{12}+\phi\right)\right]\mathrm{d}\phi\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1\left\{\cos\left[2\pi\left(\frac{t-s}{12}\right)\right]+\cos\left[2\pi\left(\frac{t+s}{12}+2\phi\right)\right]\right\}\mathrm{d}\phi\\
&= \frac{1}{2}\left\{\cos\left[2\pi\left(\frac{t-s}{12}\right)\right]+\frac{1}{4\pi}\sin\left[2\pi\left(\frac{t+s}{12}+2\phi\right)\right]\Bigg|_{\phi=0}^{1}\right\}\\
&= \frac{1}{2}\cos\left[2\pi\left(\frac{|t-s|}{12}\right)\right]
\end{aligned}$$

因此该过程平稳，具有自相关函数

$$\rho_k = \cos\left(2\pi\frac{k}{12}\right), \quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{2.3.4}$$

该例表明，对给定的时间序列，仅基于观测数据的时间序列图难以评估平稳性是否为一个合理的假设．

2.2 节中同样自白噪声构造得到的随机游动（其中 $Y_t=e_1+e_2+\cdots+e_t$）却不是平稳的．例如，方差函数 $\mathrm{Var}(Y_t)=t\sigma_e^2$ 就不是常数；更进一步，协方差函数 $\gamma_{t,s}=t\sigma_e^2(0\leqslant t\leqslant s)$ 也不仅仅依赖于时滞．但假如不直接分析 $\{Y_t\}$，而是考虑相继 Y-值的差分，用 ∇Y_t 表示，那么 $\nabla Y_t = Y_t - Y_{t-1} = e_t$，从而差分后的序列 $\{\nabla Y_t\}$ 是平稳的．这代表了在许多应用中极为有用的一种技巧的简单示例．显然，由于许多实际的时间序列，不是处于统计上的平衡状态，而是随时间变化不断发展的，因此不能用平稳过程对它们进行合理的建模．但是，经常可以通过诸如差分这样的简单技巧，把非平稳序列转换成平稳的序列，在后面的章节里，这类技巧将会给我们提供有力的帮助．

㊀ 该例所涉及的可选资料，在理解本书后续大部分内容时并不是必要的，在第 13 章谱分析入门中将会用到．

2.4 小结

本章我们介绍了作为时间序列模型的随机过程的一些基本概念．特别地，至此读者应该非常熟悉均值函数、自协方差函数和自相关函数这些重要的概念了．为进一步说明这些概念，我们还研究了一些基本的过程：随机游动、白噪声、一个简单的滑动平均和一个随机余弦波．最后介绍的是平稳性这一贯穿全书的基本概念．

习题

2.1 假设 $E(X)=2$，$\mathrm{Var}(X)=9$，$E(Y)=0$，$\mathrm{Var}(Y)=4$ 和 $\mathrm{Corr}(X,Y)=0.25$．求：

(a) $\mathrm{Var}(X+Y)$

(b) $\mathrm{Cov}(X,X+Y)$

(c) $\mathrm{Corr}(X+Y,X-Y)$

2.2 如果 X 和 Y 是相关的，而 $\mathrm{Var}(X)=\mathrm{Var}(Y)$，求：$\mathrm{Cov}(X+Y,X-Y)$．

2.3 令 X 的分布均值为 μ，方差为 σ^2，且令 $Y_t=X$ 对所有的 t 均成立．

(a) 证明：$\{Y_t\}$ 是严平稳和弱平稳的．

(b) 求 $\{Y_t\}$ 的自协方差函数．

(c) 简略地绘出 Y_t “典型”的时序图．

2.4 令 $\{e_t\}$ 为零均值白噪声过程，假设观测到的过程是 $Y_t=e_t+\theta e_{t-1}$，其中 θ 或者是 3，或者是 1/3．

(a) 求出 $\theta=3$ 和 $\theta=1/3$ 时 $\{Y_t\}$ 的自相关函数．

(b) 至此应已看出，无论 θ 取何值，时间序列都是平稳的，且不管 $\theta=3$ 还是 $\theta=1/3$，其自相关函数都相同．为简单起见，假设已知过程 Y_t 的均值是 0，方差是 1．观测 $\{Y_t\}$ 序列在 $t=1,2,\cdots,n$ 时的值，并假设可以得到对自相关系数 ρ_k 较好的估计．这时，根据 ρ_k 的估计，能否确定 θ 取哪个值（3 或 1/3）？判断的理由是什么？

2.5 假设 $Y_t=5+2t+X_t$，其中 $\{X_t\}$ 是零均值平稳序列，具有自协方差函数 γ_k．

(a) 求 $\{Y_t\}$ 的均值函数．

(b) 求 $\{Y_t\}$ 的自协方差函数．

(c) $\{Y_t\}$ 是否平稳？根据是什么？

2.6 设 $\{X_t\}$ 是平稳时间序列，并且定义 $Y_t=\begin{cases}X_t & \text{当 } t \text{ 是奇数时}\\ X_t+3 & \text{当 } t \text{ 是偶数时}\end{cases}$．

(a) 证明对所有的滞后 k，$\mathrm{Cov}(Y_t,Y_{t-k})$ 与 t 无关．

(b) $\{Y_t\}$ 平稳吗？

2.7 假设 $\{Y_t\}$ 平稳，且有自协方差函数 γ_k．

(a) 通过求 $\{W_t\}$ 的均值和自协方差函数，证明 $W_t=\nabla Y_t=Y_t-Y_{t-1}$ 平稳．

(b) 证明：$U_t=\nabla^2 Y_t=\nabla[Y_t-Y_{t-1}]=Y_t-2Y_{t-1}+Y_{t-2}$ 是平稳的．（不必求出 $\{U_t\}$ 的均值和自协方差函数．）

2.8 假设 $\{Y_t\}$ 平稳，自协方差函数是 γ_k．证明对任意固定的正整数 n 及任意常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，

如下定义的过程 $\{W_t\}(W_t = c_1Y_t + c_2Y_{t-1} + \cdots + c_nY_{t-n+1})$ 是平稳的.（注意：习题 2.7 是本题结论的特例.）

2.9 假设 $Y_t=\beta_0+\beta_1 t+X_t$，其中 $\{X_t\}$ 是零均值平稳序列，具有自协方差函数 γ_k，并且 β_0 和 β_1 是常数.

(a) 证明：$\{Y_t\}$ 非平稳，但是 $W_t=\nabla Y_t=Y_t-Y_{t-1}$ 平稳.

(b) 一般地，证明：如果 $Y_t=\mu_t+X_t$，其中 $\{X_t\}$ 是零均值平稳序列，μ_t 是 t 的 d 阶多项式，那么当 $m\geqslant d$ 时，$\nabla^m Y_t=\nabla(\nabla^{m-1}Y_t)$ 是平稳的；而当 $0\leqslant m<d$ 时非平稳.

2.10 设 $\{X_t\}$ 是零均值、单位方差的平稳过程，具有自相关函数 ρ_k. 假设 μ_t 为非常数函数，σ_t 是取值为正的非常数函数. 观测序列形如 $Y_t=\mu_t+\sigma_t X_t$.

(a) 求过程 $\{Y_t\}$ 的均值和协方差函数.

(b) 证明过程 $\{Y_t\}$ 的自相关函数只依赖于时滞. 过程 $\{Y_t\}$ 平稳吗?

(c) 是否存在时间序列，其均值为常数，$\mathrm{Corr}(Y_t, Y_{t-k})$ 与 t 无关，而 $\{Y_t\}$ 是非平稳的?

2.11 假设 $\mathrm{Cov}(X_t, X_{t-k})=\gamma_k$ 与 t 无关，而 $E(X_t)=3t$.

(a) $\{X_t\}$ 平稳吗?

(b) 令 $Y_t=7-3t+X_t$，$\{Y_t\}$ 平稳吗?

2.12 假设 $Y_t=e_t-e_{t-12}$. 证明：$\{Y_t\}$ 平稳，并且 $k>0$ 时，其自相关函数只在滞后 $k=12$ 时非零.

2.13 令 $Y_t=e_t-\theta(e_{t-1})^2$. 这里假设白噪声序列是正态分布.

(a) 求 $\{Y_t\}$ 的自相关函数.

(b) $\{Y_t\}$ 平稳吗?

2.14 求下列过程的均值和协方差函数，并判断每种情况下过程是否平稳.

(a) $Y_t=\theta_0+te_t$.

(b) $W_t=\nabla Y_t$，其中 Y_t 由 (a) 给出.

(c) $Y_t=e_te_{t-1}$.（可以假设 $\{e_t\}$ 是正态白噪声.）

2.15 假设 X 是零均值随机变量. 定义时间序列 $Y_t=(-1)^tX$.

(a) 求 $\{Y_t\}$ 的均值函数.

(b) 求 $\{Y_t\}$ 的协方差函数.

(c) $\{Y_t\}$ 平稳吗?

2.16 假设 $Y_t=A+X_t$，其中 $\{X_t\}$ 平稳，而随机变量 A 独立于 $\{X_t\}$. 用 $\{X_t\}$ 的均值和自协方差函数以及 A 的均值和方差，求 $\{Y_t\}$ 的均值和协方差函数.

2.17 令 $\{Y_t\}$ 平稳，自协方差函数为 γ_k. 令 $\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}Y_t$，证明：

$$\mathrm{Var}(\overline{Y})=\frac{\gamma_0}{n}+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\gamma_k=\frac{1}{n}\sum_{k=-n+1}^{n-1}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)\gamma_k$$

2.18 设 $\{Y_t\}$ 平稳，自协方差函数 γ_k. 定义样本方差为 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}(Y_t-\overline{Y})^2$.

(a) 首先，证明 $\sum_{t=1}^{n}(Y_t-\mu)^2=\sum_{t=1}^{n}(Y_t-\overline{Y})^2+n(\overline{Y}-\mu)^2$.

(b) 用 (a) 证明

$$E(S^2)=\frac{n}{n-1}\gamma_0-\frac{n}{n-1}\mathrm{Var}(\overline{Y})=\gamma_0-\frac{2}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\gamma_k$$

(利用习题 2.17 的结果得出最后面的表达式.)

(c) 如果 $\{Y_t\}$ 是方差为 γ_0 的白噪声过程，证明 $E(S^2)=\gamma_0$.

2.19 令 $Y_1=\theta_0+e_1$，且当 $t>1$ 时，用 $Y_t=\theta_0+Y_{t-1}+e_t$ 来递推地定义 Y_t，这里 θ_0 是常数. 则称过程 $\{Y_t\}$ 为**带漂移的随机游动**.

(a) 证明 Y_t 可以被写为 $Y_t=t\theta_0+e_t+e_{t-1}+\cdots+e_1$.

(b) 求 Y_t 的均值函数.

(c) 求 Y_t 的自协方差函数.

2.20 考虑标准的随机游动模型：$Y_t=Y_{t-1}+e_t$，$Y_1=e_1$.

(a) 使用上述 Y_t 的表达式，证明在初始条件 $\mu_1=E(e_1)=0$，$t>1$ 时，$\mu_t=\mu_{t-1}$. 由此，证明对所有 t，都有 $\mu_t=0$.

(b) 类似地，证明 $t>1$，$\mathrm{Var}(Y_1)=\sigma_e^2$ 时，$\mathrm{Var}(Y_t)=\mathrm{Var}(Y_{t-1})+\sigma_e^2$，从而 $\mathrm{Var}(Y_t)=t\sigma_e^2$.

(c) 对 $0\leqslant t\leqslant s$，用 $Y_s=Y_t+e_{t+1}+e_{t+2}+\cdots+e_s$ 证明 $\mathrm{Cov}(Y_t, Y_s)=\mathrm{Var}(Y_t)$，因而有 $\mathrm{Cov}(Y_t, Y_s)=\min(t, s)\sigma_e^2$.

2.21 对有随机初始值的随机游动，在 $t>0$ 时，令 $Y_t=Y_0+e_t+e_{t-1}+\cdots+e_1$，其中 Y_0 的分布具有均值 μ_0、方差 σ_0^2. 进一步假设 Y_0，e_1，…，e_t 是相互独立的.

(a) 证明对所有 t，$E(Y_t)=\mu_0$.

(b) 证明 $\mathrm{Var}(Y_t)=t\sigma_e^2+\sigma_0^2$.

(c) 证明 $\mathrm{Cov}(Y_t, Y_s)=\min(t, s)\sigma_e^2+\sigma_0^2$.

(d) 证明对 $0\leqslant t\leqslant s$，$\mathrm{Corr}(Y_t, Y_s)=\sqrt{\dfrac{t\sigma_a^2+\sigma_0^2}{s\sigma_a^2+\sigma_0^2}}$.

2.22 令 $\{e_t\}$ 是零均值的白噪声过程，并令 c 为满足 $|c|<1$ 的常数. 递推定义 Y_t 为 $Y_t=cY_{t-1}+e_t$，其中 $Y_1=e_1$.

(a) 证明 $E(Y_t)=0$.

(b) 证明 $\mathrm{Var}(Y_t)=\sigma_e^2(1+c^2+c^4+\cdots+c^{2t-2})$. $\{Y_t\}$ 平稳吗?

(c) 证明

$$\mathrm{Corr}(Y_t, Y_{t-1})=c\sqrt{\frac{\mathrm{Var}(Y_{t-1})}{\mathrm{Var}(Y_t)}}$$

并且，一般有

$$\mathrm{Corr}(Y_t, Y_{t-k})=c^k\sqrt{\frac{\mathrm{Var}(Y_{t-k})}{\mathrm{Var}(Y_t)}},\quad 对\ k>0$$

提示：先证明 Y_{t-1} 与 e_t 独立，再利用

$$\mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-1})=\mathrm{Cov}(cY_{t-1}+e_t, Y_{t-1})$$

(d) 对于取值大的 t，证明：

$$\mathrm{Var}(Y_t)\approx\frac{\sigma_e^2}{1-c^2}\ 和\ \mathrm{Corr}(Y_t, Y_{t-k})\approx c^k,\quad 对\ k>0$$

因此可以称 $\{Y_t\}$ 为**渐近平稳的**.

(e) 现在假设改变了初始条件，并且令 $Y_1=\frac{e_1}{\sqrt{1-c^2}}$，证明这时 $\{Y_t\}$ 平稳.

2.23 如果对任意时点 $t_1,t_2,\cdots,t_m$ 和 $s_1,s_2,\cdots,s_n$，随机变量 $\{Z_{t_1},Z_{t_2},\cdots,Z_{t_m}\}$ 与随机变量 $\{Y_{s_1},Y_{s_2},\cdots,Y_{s_n}\}$ 都相互独立，则称这两个过程 $\{Z_t\}$ 和 $\{Y_t\}$ **独立**. 证明如果 $\{Z_t\}$ 和 $\{Y_t\}$ 是独立的随机过程，那么 $W_t=Z_t+Y_t$ 是平稳的.

2.24 令 $\{X_t\}$ 是我们感兴趣的时间序列. 但由于测量过程并不完善，实际观测到的是 $Y_t=X_t+e_t$. 假设 $\{X_t\}$ 和 $\{e_t\}$ 是相互独立的过程，称 X_t 为**信号**，e_t 为**测量噪声或误差过程**.

如果 $\{X_t\}$ 是平稳的，具有自相关函数 ρ_k，证明 $\{Y_t\}$ 也是平稳的，且有

$$\operatorname{Corr}(Y_t,Y_{t-k})=\frac{\rho_k}{1+\sigma_e^2/\sigma_X^2},\quad 对\ k\geqslant 1$$

我们称 σ_X^2/σ_e^2 为**信噪比**（SNR）. 值得注意的是，SNR 越大，观测过程 $\{Y_t\}$ 的自相关函数与目标信号 $\{X_t\}$ 的自相关函数越接近.

2.25 假设 $Y_t=\beta_0+\sum_{i=1}^{k}[A_i\cos(2\pi f_i t)+B_i\sin(2\pi f_i t)]$，其中 $\beta_0,f_1,f_2,\cdots,f_k$ 是常数，$A_1,A_2,\cdots,A_k,B_1,B_2,\cdots,B_k$ 是相互独立且均值为零的随机变量，方差 $\operatorname{Var}(A_i)=\operatorname{Var}(B_i)=\sigma_i^2$. 求证 $\{Y_t\}$ 是平稳的，并求其协方差函数.

2.26 定义函数 $\Gamma_{t,s}=\frac{1}{2}E[(Y_t-Y_s)^2]$. 在地质统计学中，$\Gamma_{t,s}$称为半方差函数.

(a) 证明平稳过程有 $\Gamma_{t,s}=\gamma_0-\gamma_{|t-s|}$.

(b) 如果过程的 $\Gamma_{t,s}$仅依赖时间差 $|t-s|$，则称其为本质平稳的. 证明随机游动过程是本质平稳的.

2.27 对固定的正整数 r 和常数 ϕ，考虑定义为 $Y_t=e_t+\phi e_{t-1}+\phi^2 e_{t-2}+\cdots+\phi^r e_{t-r}$的时间序列.

(a) 证明对 ϕ 的任意取值，过程都是平稳的.

(b) 求其自相关函数.

2.28 （扩展的随机余弦波）假设：

$$Y_t=R\cos(2\pi(ft+\Phi)),\quad t=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

其中 $0<f<\frac{1}{2}$是固定的频率，R 和 Φ 是不相关的随机变量，Φ 服从（0，1）区间上的均匀分布.

(a) 证明对所有 t，$E(Y_t)=0$.

(b) 证明该过程是平稳的，且 $\gamma_k=\frac{1}{2}E(R^2)\cos(2\pi fk)$.

提示：利用导出方程（2.3.4）的算法.

2.29 （进一步扩展的随机余弦波）假设

$$Y_t=\sum_{j=1}^{m}R_j\cos[2\pi(f_j t+\Phi_j)],\quad t=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

其中 $0<f_1<f_2<\cdots<f_m<\frac{1}{2}$ 是 m 个固定的频率，并且 $R_1, \Phi_1, R_2, \Phi_2, \cdots, R_m, \Phi_m$ 是不相关的随机变量，每个 Φ_j 服从（0，1）区间上的均匀分布.

(a) 证明对所有 t，$E(Y_t)=0$.

(b) 证明该过程是平稳的，且 $\gamma_k=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}E(R_j^2)\cos(2\pi f_j k)$.

提示：先做习题 2.28.

2.30 （需要数理统计知识）假设

$$Y_t = R\cos[2\pi(ft+\Phi)], \quad t=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$$

其中 R 和 Φ 是相互独立的随机变量，f 是固定的频率. 假设相位 Φ 服从（0，1）上的均匀分布，振幅 R 服从瑞利分布，对 $r>0$，其概率密度分布（pdf）$f(r)=re^{-r^2/2}$. 证明在每个时点 t，Y_t 服从正态分布.（提示：令 $Y=R\cos[2\pi(ft+\Phi)]$，$X=R\sin[2\pi(ft+\Phi)]$. 求 X 和 Y 的联合分布. 还可以证明，所有的有限维分布都是多元正态分布，因此该过程是严平稳的.）

附录 A　期望、方差、协方差和相关系数

本附录中，我们将定义连续随机变量的期望. 但是，这里描述的所有性质对于各类随机变量都成立，无论它是离散的、连续的，或者其他的类型. 令 X 具有概率密度函数 $f(x)$，并且令（X，Y）对具有联合概率密度函数 $f(x, y)$.

定义 X 的**期望值**为：$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x$.

（如果 $\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x)\mathrm{d}x<\infty$；否则 $E(X)$ 无法定义.）$E(X)$ 也称为 X 的**期望**，或 X 的**均值**，并且经常记为 μ 或 μ_X.

期望的性质

如果函数 $h(x)$ 满足 $\int_{-\infty}^{\infty}|h(x)|f(x)\mathrm{d}x<\infty$，则可以证明

$$E[h(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}h(x)f(x)\mathrm{d}x$$

类似地，如果 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|h(x, y)|f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty$，可以证明

$$E[h(X,Y)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2.A.1}$$

作为方程（2.A.1）的推论，容易得到如下重要结论：

$$E(aX+bY+c)=aE(X)+bE(Y)+c \tag{2.A.2}$$

还有

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2.A.3}$$

随机变量 X 的**方差**定义为：

$$\mathrm{Var}(X)=E\{[X-E(X)]^2\} \tag{2.A.4}$$

（只要 $E(X^2)$）存在）. X 的方差经常记作 σ^2 或 σ_X^2.

方差的性质

$$\mathrm{Var}(X)\geqslant 0 \tag{2.A.5}$$

$$\mathrm{Var}(a+bX)=b^2\mathrm{Var}(X) \tag{2.A.6}$$

如果 X 与 Y 相互独立，那么

$$\mathrm{Var}(X+Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y) \tag{2.A.7}$$

一般地，可以证明：

$$\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2 \tag{2.A.8}$$

方差 X 的正数平方根称为 X 的**标准差**，且常记为 σ 或 σ_X. 随机变量 $(X-\mu_X)/\sigma_X$ 称为 X 的**标准化形式**. 分别地，标准化变量的均值和标准差总是 0 和 1.

X 与 Y 的**协方差**定义为 $\mathrm{Cov}(X, Y)=E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$.

协方差的性质

$$\mathrm{Cov}(a+bX,c+dY)=bd\,\mathrm{Cov}(X,Y) \tag{2.A.9}$$

$$\mathrm{Var}(X+Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y) \tag{2.A.10}$$

$$\mathrm{Cov}(X+Y,Z)=\mathrm{Cov}(X,Z)+\mathrm{Cov}(Y,Z) \tag{2.A.11}$$

$$\mathrm{Cov}(X,X)=\mathrm{Var}(X) \tag{2.A.12}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X) \tag{2.A.13}$$

如果 X 与 Y 相互独立，那么

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=0 \tag{2.A.14}$$

X 与 Y 的**相关系数**用 $\mathrm{Corr}(X, Y)$ 或者 ρ 表示，定义如下：

$$\rho=\mathrm{Corr}(X,Y)=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}$$

另外，如果 X^* 是 X 标准化后的变量，Y^* 是 Y 标准化后的变量，则 $\rho=E(X^*Y^*)$.

相关的性质

$$-1\leqslant\mathrm{Corr}(X,Y)\leqslant 1 \tag{2.A.15}$$

$$\mathrm{Corr}(a+bX,c+dY)=\mathrm{sign}(bd)\mathrm{Corr}(X,Y)$$

$$\text{其中 }\mathrm{sign}(bd)=\begin{cases}1 & \text{若 } bd>0\\ 0 & \text{若 } bd=0\\ -1 & \text{若 } bd<0\end{cases} \tag{2.A.16}$$

$\mathrm{Corr}(X, Y)=\pm 1$ 的充要条件是，存在常数 a 和 b，使得 $\Pr(Y=a+bX)=1$.