第 1 章　万有引力常数

但是牛顿生于 1642 年，这中间还有一大段的空白。就我们所知，有一点似乎很清楚，牛顿并未像音乐家莫扎特或数学家高斯一类的天才那样在年少时期便展露出伟人的锋芒。母亲对他的期望是让他成为一个农民。幸好牛顿对于农事毫无兴趣，虽然母亲的态度十分坚决，但最终在牛顿所就读学校的校长（似乎是当时唯一看到牛顿潜力的人）和他叔叔的联合劝说下，才答应了把牛顿送去剑桥大学的三一学院读书。1661 年，牛顿顺利进入了他的“安全学校”。这无疑是历史上最成功的 B 计划之一。

牛顿在学院度过的早期时光也并没有被他自己或同代人很好地记录下来。他在日记中记录了一些幸事（“去酒馆两次”）以及衰事（“打牌输掉两次”），但其中并没有丝毫天才破土而出的讯息。情况在 1664 年峰回路转，在当年“流水账”式的日记本中，牛顿记下了非常严肃认真的数学研究。在此之前，牛顿的数学知识似乎只有如今高中二年级学生的水平。牛顿当时的算术学不错，但他在代数学、几何学和三角学方面则有所欠缺。假如以他当时的水平去参加 SAT 入学考试的话，恐怕也拿不到什么好成绩。牛顿是通过购买或借阅各种最前沿的数学书籍跟上了学习的进度。从奥特雷德的著作《数学之钥》（Clavis Mathematicae）[1]中，他学习到代数学的强大和灵活性，这为他日后提出二项式定理奠定了基础。他也从沃利斯的《数学文集》（Opera Mathematica）[2]中汲取养分，最终发展出他在数学领域的标志性成就——无穷小微积分。而通过阅读斯霍滕翻成拉丁语的笛卡儿的《几何学》（Geometrie）[3]，牛顿弥补了自己在几何学方面的缺陷。

他应该是在 1665 年拿到学士学位，那一年英国爆发了最后一次大规模的黑死病疫情。由于人口密集，卫生条件差，疫情广为蔓延。从一些侧面也可以印证疫情的严重性，查理二世国王的宫廷从伦敦撤离到了牛津郡，剑桥大学也关闭了。于是牛顿返回他位于乌尔索普的家乡，在那里度过了一年半的时光，“专心研习数学与哲学”[4]。就是在这段时间，他重塑了整个世界。

万有引力定律的发展

牛顿在数学领域有着突出的贡献，但最令他名垂千古的仍是其对于科学的贡献，因为科学进步才是引领人类前进的主要动力。虽然牛顿在光学领域作出了重大贡献，但他能获得如此地位的主要原因，首先归功于他在力学和万有引力方面所做的工作，其次则是他发展出的理论及实验的科学方法。

对一条科学理论的首次阐释几乎都不是最简单的版本。像牛顿这样的革新者通常并不关心自己所说的是否能被普罗大众所理解，他们更感兴趣的是要让同行接受其观点，然后以此为基础搭建理论的大厦。牛顿的《自然哲学之数学原理》[5]便是如此。这本书通常简称为《原理》，我会偶尔拿来翻一翻，也曾下决心等退休之后好好读一读（不过它还在尚未完成的列表中）。《原理》的风格仿照了标准的几何学教材，公理、定理、前提条件、证明，条分缕析，而许多结论实际上也是几何学的。这一点并不意外，因为这本书的主要成就之一就是为开普勒三大定律的解释提供了依据（其中一部分就是牛顿对万有引力定律的论述），而这三条定律全部都是几何学的。开普勒第一定律是指行星围绕太阳运动的轨道都是椭圆的，太阳处在椭圆的一个焦点上。开普勒第二定律是指太阳中心和行星中心的连线在相等的时间内扫过的面积相等。开普勒第三定律是指各行星绕太阳公转周期的平方和它们的椭圆轨道的半

长轴的立方成正比。

这些定律不只是一位优秀的几何学者通过某些前提所推出的结论，它们都有经验基础，是基于第谷·布拉赫辛苦积累的数据，经过长期的数据收集和模型拟合才得出的。第谷是一位对天文学感兴趣的丹麦贵族，他很欣赏开普勒的早期工作，于是邀请开普勒来到他位于布拉格附近的住所，当时他正在那里建造一座新的天文台。于是，开普勒就成为了第谷的思想传人。

当时，哥白尼革命渐成气候，开普勒尝试将第谷的那些宝贵数据与哥白尼的太阳系模型结合起来，后者认为行星是沿着均匀的圆形轨道围绕太阳运动的。开普勒最初设想的行星圆形轨道模型还引入了五个正多面体——正四面体、立方体、正八面体、正十二面体以及正二十面体。

无论如何，开普勒是打算把手头的数据塞进圆形轨道模型之中的。值得庆幸的是，第谷当时刚刚获得了十分准确的火星观测记录，记录显示出火星的轨道明显不是圆形。要是当时第谷刚刚完成观测的不是火星而是金星，而金星的轨道几乎就是一个完美的圆，那么开普勒何时能发现第一定律或者最终能否发现第一定律，可能就要打上一个问号了。

第一定律的发现体现出开普勒十分严谨的科学态度，而第二和第三定律的发现则凭借的是他过人的数学能力。计算第二定律中扫过区域的面积已经大大超出了基础欧几里得几何学的能力，同时，找出第三定律中所蕴涵的复杂关系也要求具备相当的数学天赋。尽管任务艰巨，开普勒仍投入了数年时间来构建和检验其第二和第三定律。在这个过程中，开普勒遭遇了众多个人及政治上的变故，他的妻子和最爱的一个儿子都因病离开了人世，又由于拒绝皈依天主教，他可以谋生的途径也受到限制。此外，他的母亲遭到施行巫术的指控，他不得不为此事奔波，进行辩护。在当时，此项指控是会导致酷刑致死的。不过，这项指控被证明是出于传言。（这并不意外，因为据我所知，不论是当年还是现在，货真价实的巫术案件并不多见。）最终，开普勒帮助母亲证明了清白。

开普勒的墓志铭很好地总结了他的成就：

我曾测量天高，今欲测量地深；

思想遨游天际，肉体长眠大地。[6]

速度问题

从开普勒第一及第二定律中可以直观得出的结论是，行星运行在自己的轨道中，在不同的位置上运行的速度不同。所谓椭圆就是两端拉长的圆圈，形状好像飞艇，有一长一短两根对称轴。如果画一个椭圆

图 1

代表行星的轨道，并把太阳置于椭圆长轴的左焦点上，再假设行星在靠近太阳的一端从长轴的紧上方运行到关于长轴对称的紧下方（图 1）本书插图均为编者所加，部分图片的许可协议见文前的“图片使用说明”，图注文字遵从 CC BY SA 3 0 协议。——编者

注，我们可以将行星扫过的区域大概视为一个等边三角形（虽然行星的运动轨迹是一条曲线，但在很短的距离内，我们可以将其视为与长轴垂直的一条线段）。三角形的高是长轴上太阳与近侧椭圆弧之间的距离，由于太阳位于椭圆的左焦点，因此这一距离比长轴的一半要短。很明显，如果行星的运行速度保持不变，那么在相同的时间内，不管它是靠近太阳还是远离太阳，它在轨道上都会划过相同的距离。这时，如果行星在长轴远端的紧下方运行相同的距离到了紧上方，根据开普勒第二定律，仍然可以将行星扫过的区域视为一个等边三角形，那么这个等边三角形的底边和刚才的相同。然而，这个三角形的高是从太阳到长轴远端的距离，这比长轴的一半要长，因而前后两个三角形的面积是不同的。因此，如果开普勒第一及第二定律成立，那么行星在太阳近端和远端的运行速度应该是不相同的。

牛顿在微积分方面所做的工作对于解释以上问题非常重要。微积分提供了一种方法，能够用于确定不断变化的数值，比如行星或一辆车在任意特定时刻的速度。举例来说，某个下午我花了三个小时从洛杉矶开车去圣地亚哥，全程 210 千米。通过简单运算，我的平均速度为每小时 70 千米，但这无从告诉我汽车经过 405 号州际公路的开阔地带时速度有多快，或是米申维耶霍附近遇到堵车时速度有多慢。如果要确定汽车在下午两点钟的速度，我们需要查看某一时间段内的平均速度，并逐渐把时间段缩小。要确定某一个时间点的速度，以之为起点往后一秒钟内的平均速度要比以之为起点往后一分钟内的平均速度更加准确，因为在一分钟的时间段内汽车改变速度的可能性更大。如果我们测量平均速度时选择更短的时间段，比如说 0　001 秒，那么所得出的速度就十分接近汽车在时间段起点的准确速度了。当然，前提是我不能在这 0　001 秒内撞上一辆卡车。

牛顿的《原理》不仅意识到这个问题，而且还提出了一种可以计算出在任何时间点的瞬时速度的方法，在今天的微积分中被称为差商法，其中涉及对平均值求极限。他同时预料到了很多微积分学生在学习这部分时会面临的困难以下文字引用了王克迪的译文，参见：《自然哲学之数学原理》，王克迪译，袁江洋校，陕西人民出版社，武汉出版社，2001 年，第 49 页。——译者注：所以我在证明以后的命题时宁可采用最初的与最后的和，以及新生的与将趋于零的量的比值，即采用这些和与比值的极限，并以此作为前提，尽我可能简化对这些极限的证明。这一方法与不可分量方法可作相同运用，现在它的原理已得到证明，我们可以更可靠地加以使用。所以，此后如果我说某量由微粒组成，或以短曲线代替直线，不要以为我是指不可分量，而是指趋于零的可分量，不要以为我指确定部分的和与比率，而总是指和与比率的极限，这样演示的力总是以前述引理的方法为基础的。[7]

虽然我对于微积分知识有很好的把握，但上面这段牛顿的解释对我来说也不好懂。而对一名 21 世纪的学生来说，我以为，要从他的书中学习不论是微积分还是万有引力定律，几乎都是不可能的。

大 G 和小 g

牛顿万有引力理论的核心内容实际上包含两个常数：《原理》一书中所描述的普适常数 G，以及在地球表面由重力引起的局部加速度 g。后者常被称为小 g，相对来说比较容易测量，只要我们不要求太高的精准度，比如能够接受小数点后两位或三位的近似值。在一块真空区域（消除空气阻力），让一个物体自由下落，测量坠落距离和坠落时间即可计算出近似值。最初是伽利略发现物体的坠落距离与坠落时间的平方成正比，这一点同样也是牛顿万有引力定律的众多推论之一，在微积分第一学期的课程中就会见到：令距离为 d，时间为 t，

则有公式 d=12gt2，很容易就可以计算出小 g 大约为 9　8 米每二次方秒。将该数值拆开来看会比较容易想象，“9　8 米每秒”（停顿）“每秒”。也就是说，物体基于地球重力下落的速度每秒增加 9　8 米每秒。在月球表面，物体的坠落速度会慢得多，这一点宇航员已经向我们展示过了，这时即使是大笨狼怀尔也来得及从坠落的铁砧下逃脱。正因如此，小 g 并非普适常数，而是一个局部常数。

大 G 则是普适常数，但 G 和 g 之间存在一种关系，你可能已经有所预料了。牛顿的重要成就之一，就是提出了球体的万有引力的表现形式就好像其全部质量均集中于中心的一点上。因此，地球（质量为 M，半径为 R）对一个质量为 m 的物体所施加的引力就有两种计算方式：按照万有引力定律，F=GmM/R2；按照牛顿的第二力学定律，F=mg。将两个等式合并，等号两边的 m 被抵消掉，从而推出等式 g=GM/R2。古希腊人就已经掌握了 R 的大体数值，但如果要确定 G 的大小，则必须知道 M 的数值，这一点直到牛顿去世以后很久才有所进展。

事实上，在之后的两个世纪里面，并没有人真正想要确定 G 的大小，因为那一时期的所有科学研究都不需要用到 G 的数值。过去在天文学中的很多进展，今天也依旧如此，都是利用比例来计算的。这一点并不意外，因为通过各种比例等式也可以进行很实用的运算，在《原理》一书很久之前人们就已经这么做了。比例最早出现在算术学里。（如果两个鸡蛋做成的饼干够三个小朋友吃，那么多少个鸡蛋做成的饼干才够 12 个小朋友吃呢？）之后又出现在几何学里，我们可以利用相似三角形对应边的比例等式来测量一棵无法攀登的树或远处山峰的高度。这两种对于比例的应用（算术学和几何学）在自然科学领域都有着非常重要的实用性，在日常生活之中也是如此。鸡蛋数量不对的话，烤出来的饼干可能就会参差不齐，而这应该不是你期望看到的。

牛顿能从他的万有引力定律中推导出开普勒第三定律——任何两颗行星公转周期之比等于行星与太阳平均距离的立方之比。天文学家可以利用这些比值，再加上地球与太阳之间的距离（乔凡尼·卡西尼在《原理》一书出版之前十多年就算出了该数据）[8] 以及一颗行星的公转周期便可计算出该行星与太阳之间的平均距离。整个计算过程完全不需要知道万有引力常数，因此便没有人费心去钻研它，它的面纱直到 18 世纪末才在一项实验中被揭开。

卡文迪许试验

大多数伟大的科学家除了留下了他们的理论和实验记录之外，还会给人留下很多关于他们参与各种会议以及与其他科学家在工作上或私底下交往的记忆。不过就像我们的日常世界一样，科学世界也存在一些孤独者，18 世纪最伟大的实验科学家之一亨利·卡文迪许便是其中一位。

卡文迪许 1731 年生于法国，父母为查尔斯·卡文迪许公爵和安妮·格蕾夫人，他因此继承了很大一笔遗产。他在剑桥大学读了三年书后便辍学了，也没有拿到剑桥的学位，但这并未对他的科学事业造成一丝一毫的妨碍。不过卡文迪许却在私人生活中面临着严重的障碍，社交场合和人际关系对他来说似乎是个天大的困难。他在女子面前过分害羞，连与家里的女仆沟通时都需要动用纸条。为了防止与女仆狭路相逢，他甚至还在家里修建了特别的楼梯通道和入口。显然，卡文迪许的社交活动并不值得写进日记之中，不论是他自己的日记还是他人的。他在公共场合现身的记录大概就只有参加科学会议的场合了。

知名医生和作家奥利佛·萨克斯曾经认为卡文迪许患有阿斯伯格综合征，这种病与孤独症类似，患者对于与他人接触以及重复相同的行动感到十分困难。但重复行动，或者至少愿意翻来覆去做一件事，恰好是成为一名实验科学家所必需的素质，而卡文迪许在化学和电学方面的研究都作出了卓越的贡献，其中包括他对于空气成分的分析。他发现空气中包含大约20%的"可燃气体"(氧气)以及接近80%的氮气，并提出空气中还含有大约1%的其他气体。直到一个世纪以后，人类才发现氩元素以及这种元素存在于空气中的证据。同时，他对于"易燃气体"（氢气）也做了很多先驱性的研究工作，并对于氢和氧作为水的化学成分这一发现富有贡献，已经十分接近于准确的 H2O 的分子式。[9]

卡文迪许在电学研究方面也作出了突出的贡献，他是最早研究绝缘材料(不导电的材料)的科学家，也是最早区分出电荷与电压的人。同时，受到关于某些鱼类能够发出电击的新闻报道启发，他还第一个进行了水的导电研究：他实实在在用皮料和木材做了一条鱼的模型，将之放入咸水中，并在其身上安装模拟的发电器官，实验显示出鱼的确可以发出电击。虽然卡文迪许并未在发表成果方面做过多少努力，但他还是将研究内容记录了下来，这些记录后来被著名科学家詹姆斯·克拉克·麦克斯韦整理和发表，这一方面确保了卡文迪许在身后获得他应得的荣誉，另一方面也说明卡文迪许在英国科学界声望之高。

最令卡文迪许广为人知的一个实验首次确认了地球的密度，因此现在通常被称为"卡文迪许实验"。虽然测量地球密度是卡文迪许的初衷，但该实验常常被称为"给地球称重"，因为一旦地球平均密度确定之后，自然可以通过简单的密度与体积的乘积得出非常精准的地球重量。实际上，由于该实验广为人知，在之后的许多年里，居住在卡文迪许家周围的邻居一直将他居住的那栋建筑称为"给地球称重的地方"。由于卡文迪许鲜少在公众场合露面，可以说他是一位真正久闻其名未见其人的科学家。

该实验是一项独具匠心的杰作，实验中采用了一台被称为扭秤的装置（图 2）。两个较大较重的球相互分开固定好，两只小球分别悬挂在扭秤的横杆两端，就像一只小哑铃，而横杆挂在一根悬丝上。大球和小球之间的万有引力使得小球会发生非常细微的转动(如果通过磁铁而非万有引力来制造这种转动效果，所得到的转动幅度要大得多，这一点也说明了磁力要比万有引力强得多)。旋转的幅度可以测量出来，然后就可以用来计算地球的平均密度或地球质量。由于卡文迪许的测量装置十分精密，他计算出的结果一个世纪后才被超越。

图 2 卡文迪许的扭秤（来源：Philosophical Transactions of the Royal Society of London，vol 88，p　526，1798）

在卡文迪许的数据背后隐藏着一种计算万有引力常数的方式，可是由于当时并没有什么人真的在意万有引力常数，所以也没有人费心去算它。今天的物理学家则可以利用卡文迪许的数据，以一种相对简洁明了的方式计算出万有引力常数。

假设 M 为大球的质量，L 为哑铃形状横杆的长度，θ 为横杆旋转的角度，r 为旋转结束后大球中心与小球中心之间的距离，T 为扭秤的自由振荡周期（就像一个钟摆周期）。状态稳定后，两种施加在小球上的力，大球的吸引力及悬丝欲恢复原状所施加的复原力是相等的，这样便可得出以下计算万有引力常数 G 的公式：

G=2π2Lr2θ/MT2

实际上，卡文迪许在计算地球平均密度时采用的也是同样的参数。他运用牛顿第二力学定律，将小球所受净力 mg 和万有引力 GmME/rE2 画上等号，这里 ME 和 rE 分别表示地球的质量和半径。我们也可以这么做，设地球的平均密度为ρ ，由于地球体积为 4π rE3/3，于是可以得出ρ =3g/(4π GrE)。实际上，卡文迪许算出的地球密度为 5　448 克每立方米，而在对外公布的时候，他却非常意外地漏掉了一个数字 4，给出了 5　48 克每立方米的结论。我们习惯于将出生以前的时代都看成相对原始，18 世纪末似乎仍趋近于旧石器时代：当时，生病的原因尚不可知，马背仍然是最快速的运输方式。即便如此，卡文迪许当时的实验结果已经极为精确。如今在网上已经有非常丰富的相关资料，大家还可以读到卡文迪许自己关于这次实验的报告。[10]

他或许不具备今日的资源，但他对计划和执行实验投入了无比的耐心。同时，他也保有学术诚信。在给《自然科学会报》的报告中，卡文迪许写道："许多年前，已故的皇家学会会员约翰•米歇尔精心设计出了一种方法，利用小质量物体之间微弱的吸引力来测算地球密度。但由于他一直忙于其他工作，直到去世前不久才完成了这一测量仪器，因而也未能使用该仪器进行任何科学实验。他去世以后，设备辗转到了剑桥大学教授弗朗西斯•约翰•海德•渥拉斯顿手中。但这位教授不具备方便的实验条件，于是就非常好心地将设备转给了我。"[11] 同时，这位米歇尔也是第一位设想黑洞存在的人。在我看来，历史实在是欠米歇尔一个公道。整个实验是他的思想，用的是他的设备，或许是时候将这个实验的名称改为米歇尔卡文迪许实验了。

不然还要等到什么时候呢？

现代科学非常看重对于基础常数数值的测定。国际科技数据委员会（CODATA）会定期收集最新的基础常数数据。我所能找到 G 的最近一次更新是在 2006 年的 CODATA 报告[12] 中，那一节的报告开头如此写道："华中科技大学团队……利用扭秤周期法测量了 G 的数值。他们使用了高 Q 值的扭秤，两端各悬挂一个重 6　25 千克的不锈钢圆柱体……"[13] 在米歇尔和卡文迪许去世两百多年的时间里，人类的科技发展天翻地覆，但他们所提出的实验方法依旧保持前沿地位。在 8 次确定万有引力常数的测量实验之中，共有 6 次使用了扭秤。为什么我们需要尽可能精确的 G 的数值这并不是个只有像卡文迪许那样的科学呆子才感兴趣的话题。

万有引力常数是整个宇宙的基础。人们意识到它的存在可能要早于任何其他的基础常数，然而迄今为止，我们也只是将其精确到了小数点后 5 位，低于本书介绍的所有其他常数的精确性。原因主要在于万有引力相比其他力（电磁力、强核力、弱核力）来说极其微弱。在不久的将来，我们应该能看到这方面精确测量的进展。2006 年 CODATA 报告中关于万有引力常数的章节中也提到科学家正在使用原子干涉技术进行实验，通过分析波形图来确定万有引力常数。不过，可能也存在众多其他可利用现有数据的实验方法。

如果某个物体沿圆形轨道围绕地球运行，其轨道半径为 r、轨道周期（物体绕地球运转一周所需的时间）为 T，而地球质量为 M，那么就可以推算出轨道周期 T=2π r3/2/(GM)1/2。假设 r、G、M 三者数据未知，但只要有足够多的物体沿着圆形轨道运转，我认为就有可能测算出 T 和 r 的数值，并能达到一个很高的精度。只要有两个不同的物体，就有两个关于 G 和 M 的等式。根据任意一对沿着圆形轨道运转的物体都可以求得 G 和 M 的数值，而这些结

果可以继续进行统计分析。即使轨道不是圆形的，也可以利用轨道参数确立一个轨道周期的等式，事实上太空中正有非常多的碎片围绕着地球旋转。

或许我们无法测量到足够精确的数据，或许电脑还无法胜任这样的分析工作，或许某种统计学原理会排除掉此种可能性，但即便如此，也值得一试。NASA 有一个有关太空碎片的庞大数据库，如果我是个数据挖掘师，就会带上我的数据铲子和凿子，一头扎进这座数据金矿之中。为什么要这么较真呢？其中一个原因是它会为未来的空间飞行带来潜在的麻烦，特别是当我们有能力探索恒星的时候，我可不想因为没有掌握 G 后面足够的小数位数而在抵达比邻星前就耗尽了燃料。不过，更紧迫的一个原因在于，精确的 G 的数值能够帮助我们更精确地确定未来可能会威胁到地球的那些彗星和小行星的位置。有效的预警能够让我们提前做好防备。

注释

［1］D. Whiteside,“Sources and Strengths of Newton　s Early Mathematical Thought”in The Annus Mirabilis of Sir Isaac Newton, 1666~1966, ed. R. Palter (Cambridge, MA: MIT Press, 1970), 74。

［2］同上。

［3］同上。

［4］ J. Gribbin, The Scientists: A History of Science Told Through the Lives of Its Greatest Inventors (New York: Random House, 2003), 181。

［5］ I. Newton, Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, trans. Motte， revised by Cajori (Berkeley: University of California Press, 1962)。

［6］ T. Koupelis, In Quest of the Universe (Sudbury, MA: Jones & Bartlett Publishers, 2011), 62。

［7］ S. Hawking, Principia, Isaac Newton: On the Shoulders of Giants (Philadelphia: Running Press, 2002), 32。

［8］著名的意大利天文学家乔凡尼·卡西尼（以其名字命名的探测器正绕着木星飞行）是首位精确测算出太阳与地球之间距离的天文学家。他所采用的测量方法被称为视差法，利用的是当时得到改进的望远镜以及这样一个简单事实：当我们从两个不同位置对着固定背景观察一个附近的物体时，该物体在固定背景上的位置会发生移动（试着分别用左眼和右眼对着远处的天际线观察一个附近的物体，你就可以体会到这一现象了）。通过测量夹角的角度以及两个观察点之间的距离，再运用几何学和三角学的原理，便可计算出观察者与那个附近物体之间的距离。卡西尼和一位天文学家同事在同一时刻分别在巴黎和法属圭亚那进行了测量，最终测算出的太阳与地球之间的距离跟现在大家所接受的数值仅存在 1%的误差。

［9］在确定元素原子量的道路上，水的化学构成是一个主要障碍。虽然卡文迪许似乎已经发现了 H2O 的分子式，但道尔顿在发展其原子理论时则显然没有意识到这一成果，或是拒

绝承认这一成果。正如我们将在第 5 章看到的，阿伏伽德罗提出了准确的分子式，同时也提出了支撑这一分子式的理论。

以下站点中便将提出水的分子式（2　02 份氢气相应 1 份氧气）归功于了卡文迪许：http://mattson　creighton　edu/History_Gas_Chemistry/Cavendish　html。

［10］可参见 http://www　archive　org/details/lawsgravitation00cavegoog（2011 年 1 月 6 日有效）。

［11］同上，第 59 页。

［12］可参见 http://arxiv　org/find （2011 年 1 月 27 日有效）。这是数据库首页，只需在“Experimental full text search”条目下输入“CODATA 2006”搜索即可。

［13］同上，第 57 页。