

2.1 : 拉普拉斯妖

“很多文章中，分形总是和混沌连在一起，现在，我对分形好像学到了不少，但却还完全不知道混沌是什么啊？你们知道吗？”王二问两位师兄。

张三也说：“分形的确太奇妙了，特别是计算机产生的图像，真可算是一门特别的艺术！不过我还没有看出来它和我们学的科学有什么关系啊？”

李四快毕业了，正在准备考某某教授的研究生，说那个X教授做的课题与混沌有关。因此，最近读了一些分形以及混沌理论相关的书和文章。

什么叫‘混沌’？要用一个简单的方法来讲解清楚‘混沌理论’是很困难的。不过，我们的老祖宗早就使用了‘混沌’这个词来描述和表达中国古代人的宇宙观：

“天地混沌如鸡子，盘古生其中。”

盘古开天地是我们十分熟悉的神话，无愧于中国几千年的文明，我们的祖先早就认识到我们有序的文明社会是诞生于混沌之中：“天地混沌如鸡子”，有点像现代物理学所描述的‘宇宙大爆炸’后的世界。

不过，‘盘古开天地’的故事只说了一半，说的是有关我们的过去的那一半。就算宇宙的未来是天地混沌一片吧。宇宙的未来如何呢？预测未来总是比探讨过去更具诱惑力和实用性。不是吗？气象预报让你能未雨绸缪；预测股市的走向可能使你发大财；研究未来的学者文人颇受人尊重；还有那些张大师、李大师之流，也得靠自称有先知先觉的功能，来蒙蔽人们，招摇撞骗。

我们将要解释的‘混沌理论’，就与预测未来有点关系。

其实，科学的的目的之一就是要解释世界，放眼未来。问题是这些“未来事件”在什么条件下可以被预测？在多大程度上可以被预测？先见之明者能有多远的眼光？预测的准确性又如何？常言道：“人有旦夕祸福，天有不测风云”，利用今后日新月异的科学技术，是否就能完全预知将要发生的“旦夕祸福”与“不测风云”，及未来的一切了呢？这一类有关“将来”的问题，用如今学术的语言来说，叫做：“研究一个动力系统的长期行为”。

1975年，美国数学家约克，和他的华裔研究生李天岩，将“混沌”这个词赋予科学的定义，用以描述某些系统长时期观察时表现的奇异行为。因此，这里我们将讨论的混沌理论，有别于通常意义的“混沌”，有别于盘古开天地时的混沌。它探索的课题，与“世界的可知/不可知”这类哲学问题有关……

张三见李四好像准备要夸夸其谈地大谈哲学，耐不住了，说：“我可看不出来，你讲的这些混沌哲学，与我们了解的分形有什么关系呢？”

李四叫他别急，慢慢听下去吧。

刚才我们不是说过，混沌理论是研究一个动力系统的长期行为吗？你们应该还记得曼德勃罗图是怎么画出来的吧，那时我们考虑的不就是一个非线性方程，在进行无限次迭代后，结果产生的不同行为吗？对于不同的初始值，无限次迭代后结果将不一样，有些跑到无穷远处，有些保持有限数值。在分形中的“无限次迭代后的行为”，就相当于这儿混沌理论中所说的“长期行为”啊！

两个朋友有些开窍，王二兴奋起来：“啊，原来是这么回事！对，‘无限次迭代’就

是生物中的代代相传，有继承自相似性的遗传，也有因随机偶然因素引起的变异，一代又一代绵延下去……”

张三也有所领悟：“那么，我在写分形程序时所用的迭代方程，就是相应于混沌理论中所说的物理系统遵循的规律了，比如说，牛顿定律？从牛顿定律也可能得出混沌吗……对了，听说有个三体问题……”

对啊！这就是为什么我们还得扯到牛顿那个时代，还得扯到哲学，李四得意洋洋地继续讲下去。

我们的世界到底是决定的，还是非决定的？是可预测的，还是不可预测的？这一直是令古今中外的学者、哲人们困惑、争论的基本问题。三百多年前牛顿力学的诞生是科学史上的一个重要的里程碑。牛顿主义的因果律和机械决定论认为：世界是可以精确预测的。根据牛顿物理学，宇宙似乎可以被想象成一个巨大的机器，其中的每种事件都是有序的、规则的及可预测的。牛顿三大定律似乎放之四海而皆准，用于万物无不可。运动方程有了，只要初始条件给定了，物体的运动轨迹则应该完全可知、可预测，直到宇宙毁灭的那一天。

可以想象，一幅决定论的、简单的、井井有条的、可预测的、似乎已经完美无缺的理论体系和世界图景是何等诱人，它使当年的科学界欢呼雀跃、陶醉不已。以至于连神学界主宰一切的上帝之类也想来插上一手。因此，牛顿力学的时代，宿命论、神秘主义甚嚣一时。天才的牛顿也未能免俗，认为造物主实在伟大非凡，造出的世界精妙绝伦、天衣无缝。因此，晚年的牛顿潜心研究神学。

牛顿走了，拉普拉斯来了。拉普拉斯也醉心牛顿力学完美的理论体系，他把万有引力定律应用到整个太阳系，研究太阳系及其它天体的稳定性问题，被誉为“天体力学之父”。不过，和牛顿不一样，拉普拉斯并不将功劳归之于上帝，而是把上帝赶出了宇宙。

拿破仑看过拉普拉斯所写的《天体力学》一书之后，奇怪其中为何只字未提上帝？拉普拉斯自豪地说了一句话，令拿破仑目瞪口呆。拉普拉斯说：“我不需要上帝这个假设！”。



图(2.1.1)宣称决定论的拉普拉斯

拉普拉斯不信上帝，却仍然坚信决定论。他不需要假设上帝存在而造出了宇宙，但他却假设有某个‘智能者’，后人称之为‘拉普拉斯妖’的东西，能完全计算出宇宙的过去和未来。当年的阿基米德对国王说：“给我一个支点，我能推动地球！”。拉普拉斯仿效阿基米德的口气，对世人立下这样的豪言壮语：

“假设能知道宇宙中每个原子现在的确切位置和动量，‘智能者’便能根据牛顿定律，计算出宇宙中事件的整个过程！计算结果中，过去和未来都将一目了然！”

过去和未来，尽在拉普拉斯妖的掌控之中，这代表了拉普拉斯信奉的决定论哲学。

不可否认，决定论的牛顿力学迄今为止取得了、也必将继续取得辉煌的成就。它是人类揭开宇宙奥秘，寻找大自然秩序的漫漫长途上的第一个伟大的里程碑。它曾用简单而精确的计算结果，预测了海王星、冥王星的存在及其它天体的运动；又以普适而优美的数学表述，对各种地面物体的复杂现象做出了统一的解释。借助牛顿力学，人类发明了各类机械设备、设计了各种运载火箭，并把航天飞机送到了宇宙空间。纵观周围环绕我们的事物：穿梭于云层里的飞机、高速公路上飞驰的汽车、城市中高耸入云的摩天大楼、遍布全球的铁路桥梁，无一不包含着牛顿力学的功劳。

继拉普拉斯之后，19世纪物理学发现的不可逆过程、熵增加定律等，已经使得拉普拉斯妖的预言成为不可能。再以后，量子力学中的不确定原理，以及混沌理论所展示的、确定性系统出现内在“随机过程”的可能性，更是给了决定论致命的一击。

“无可奈何花落去，似曾相识燕归来”。任何理论都不无例外地有其局限性。20世纪初期的量子物理和相对论的发展打破了经典力学的天真。相对论挑战了牛顿的绝对时空观，量子力学则质疑微观世界的物理因果律。根据量子力学中海森堡的测不准原理，在同一时刻，你不可能同时获知某个粒子的精确位置和它的精确动量。你也不能分两步来测量，因为对于微观世界而言，测量本身就已经改变了被测量物的状态。所以拉普拉斯所需要的数据是不可能精确得到的，自然也不可能存在可以预知一切的物理学理论。

量子力学的规律揭示了微观世界的不可预测性，混沌理论则从根本上否定了事件的确定性，把非决定论推至成熟。混沌现象表明，避开微观世界的量子效应不说，即使在只遵循牛顿定律的、通常尺度下的、完全决定论的系统中，也可以出现随机的行为。除了广泛存在的外在随机性之外，确定论系统本身也普遍具有内在的随机性。也就是说，混沌能产生有序，有序中也能产生随机的、不可预测的混沌结果。即使某些决定的系统，也表现出复杂的、奇异的、非决定的、不同于经典理论可预测的那种长期行为。

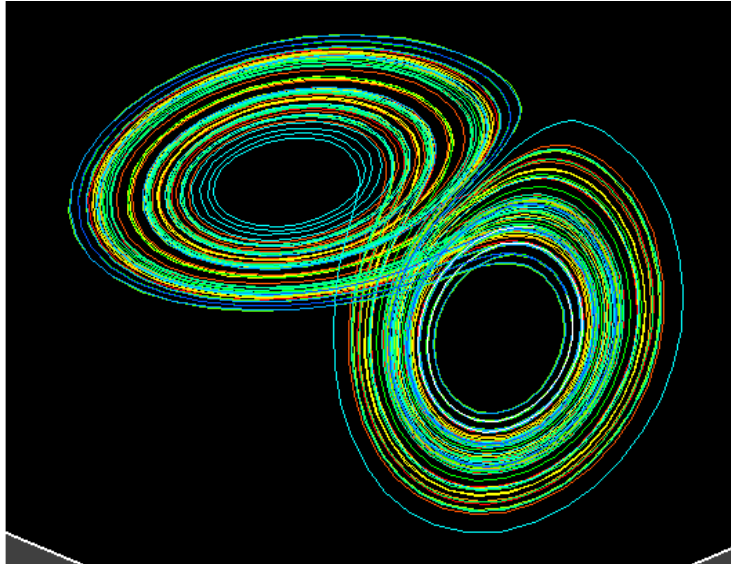
从另一个角度说，混沌理论揭示了有序与无序的统一、确定性与随机性的统一，使得决定论和概率论，这两大长期对立，互不相容，对于统一的自然界的描述体系之间的鸿沟正在逐步消除。有人将混沌理论与相对论、量子力学同列为二十世纪的最伟大的三次科学革命，认为牛顿力学的建立标志着科学理论的开端，而包括相对论、量子物理、混沌理论三大革命的完成，则象征着科学理论的成熟。

2.2 : 洛伦茨的迷惑

李四洋洋洒洒地高谈阔论了一番，张三笑起来了，说李四犯了和他的物理界老祖宗们一样的毛病，把物理当成哲学了。物理毕竟不是哲学，你还是给我们讲一些具体点的东西

吧，讲与你的那个X教授做的课题有点关系的。

李四扶正了带着的深度近视眼镜，仍然不紧不慢的，一边打开一本书，一边说，这不马上就要进到正题了吗：经典力学为何导出了决定论？混沌理论又是怎样证明一个决定论的系统也可以出现随机的行为的呢？你们看，当我们翻开任何一本关于混沌数学的书，差不多都能看到与图（2.2.1）类似的图案。那是混沌理论的著名标签：洛伦茨吸引子^[C]。



图（2.2.1）：洛伦茨吸引子^[C]

“什么是‘吸引子’啊？”王二问。

李四摸了摸大脑袋说：“你的问题提得好啊，不过，‘吸引子’这个题目超前了一点儿，以后再讲。今天，我先讲讲这个图的来由，讲讲洛伦茨的工作吧……”

爱德华·洛伦茨（1917-2008）是一位在美国麻省理工学院做气象研究的科学家。上世纪的60年代初，他试图用计算机来模拟影响气象的大气流。当时，他用的还是由真空管组成的计算机，那是一个充满整间实验室的庞然大物啊。我想，那机器虽然大，计算速度还远不及我们现在用的这些电脑吧。所以，可想而知，洛伦茨没日没夜的，工作得很辛苦。严谨的科学家不放心只算了一次的结果，决定再作一次计算。为了节约一些时间，他对计算过程稍微作了些改变，决定利用一部分上次得到的结果，省略掉前一部分计算。

因此，那天晚上，他辛辛苦苦地工作到深夜，直接将上一次计算后的部分数据一个一个打到输入卡片上，再送到计算机中。好，一切就绪了，开始计算！洛伦茨才放心的回家睡大觉去了。

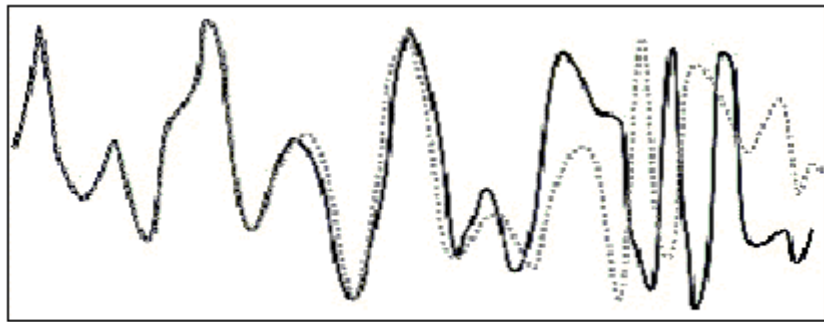
第二天早上，洛伦茨兴致勃勃地来到MIT计算机房，期待他的新结果能验证上一次的计算。可是，这第二次计算的结果令洛伦茨大吃一惊：他得到了一大堆和第一次结果完全不同的数据！换句话说，结果1和结果2千差万别！

这是怎么回事呢？洛伦茨只好再计算一次，结果仍然如此。又再回到第一种方法，计算后得到原来的结果1。洛伦茨翻来覆去地检查两种计算步骤，又算了好几次，方法1总是给出结果1，方法2总是给出结果2。两种结果如此大大不同，必定是来自于两种方法的不同。但是，两种方法中，最后的计算程序是完全一样的，唯一的差别是初始数据：第一种方法用

的是计算机中存储的数据，而第二种方法用的是洛伦茨直接输入的数据。

这两组数据应该一模一样啊！洛伦茨经过若干次的检查和验证，盯着一个一个的数字反反复复看。啊，终于看到了。两组数据的确稍微有所不同，若干个数据中，有那么几个数字，被四舍五入后，有了一个微小的差别。

难道这么微小的差别（比如，.000127）就能导致最后结果如此大的不同吗？洛伦茨百思而不解。



洛伦茨的两次计算结果

图（2.2.2）：实线和虚线分别是洛伦茨的两次计算过程：初始值的微小差别，导致最后的结果完全不同^[48]。

上面的示意图中，显示的是与洛伦茨气象预报研究有关的结果。其中横坐标表示时间，纵坐标表示洛伦茨所模拟，也就是想要预报的气候中的某个参数值，比如说，大气气流在空间某点的速度、方向，或者是温度、湿度、压力之类的变量等等。根据初始值以及描述物理规律的微分方程，洛伦茨对这些物理量的时间演化过程进行数字模拟，以达到预报的目的。但是，洛伦茨发现，初始值的微小变化，会随着时间增加而被指数放大，如果初始值稍稍变化，就使得结果大相径庭的话，这样的预报还有实际意义吗？

王二似乎恍然大悟：“啊，难怪气象台播的气象预报经常都不准，招来骂声一片，看来他们也有他们的苦衷啊！”

张三说，图（2.2.2）这个曲线的意思比较容易理解，但是那个图（2.2.1）是怎么得来的啊？我看它没完没了的绕圈圈，这与洛伦茨的气象预报计算有什么关系呢？

李四说，慢慢听，当然有关系！当时的洛伦茨虽然甚感迷惑，却未必见得认识到了这个偶然发现的重要性，也不一定能想到与此相关的‘混沌型’解将在非线性动力学中掀起一场轩然大波。尽管如此，洛伦茨毕竟是一位数学训练有素的科学家。实际上，洛伦茨年轻时在哈佛大学主修数学，只是因为后来爆发了第二次世界大战，他才服务于美国陆军航空队，当了一名天气预报员。没想到经过战争中这几年与气象打交道的生涯，洛伦茨喜欢上了这个专业。战后，他便改变方向，到MIT专攻气象预报理论，之后又成为了MIT的教授。他要利用他的数学头脑，还有当时刚刚初露锋芒的计算机和数字计算技术，来更准确地预测天气，这是洛伦茨当时梦寐以求的理想。

可是，这两次计算结果千差万别，这种结果对初始值的分外敏感性给了洛伦茨的美好理想当头一棒！使洛伦茨觉得自己在气象预报工作中似乎显得山穷水尽、无能为力。为了

走出困境，他继续深究下去。然而，越是深究下去，越是使洛伦茨不得不承认他的“准确预测天气”的理想是实现不了的！因为当他研究他的微分方程组的解的稳定性时，发现一些非常奇怪和复杂的行为。

洛伦茨以他非凡的抽象能力，将气象预报模型里的上百个参数和方程，简化到如下一个仅有三个变量及时间的、系数完全决定了的微分方程组。

$$dx/dt = 10(y - x) \quad (2.2.1)$$

$$dy/dt = R*x - y - xz \quad (2.2.2)$$

$$dz/dt = (8/3)z + xy \quad (2.2.3)$$

这儿方程组中的 x, y, z ，并非任何运动粒子在三维空间的坐标，而是三个变量。这三个变量由气象预报中的诸多物理量，如流速、温度、压力等等简化而来。方程(2.2.2)中的 R 在流体力学中叫做瑞利数，与流体的浮力及粘滞度等性质有关。瑞利数的大小对洛伦兹系统中混沌现象的产生至关重要，以后还要谈到。

这是一个不能用解析方法求解的非线性方程组。洛伦兹将瑞利数 $R=28$ ，然后，利用计算机进行反复迭代，即首先从初始时刻 x, y, z 的一组数值 x_0, y_0, z_0 ，计算出下一个时刻它们的数值 x_1, y_1, z_1 ，再算出下一个时刻的 $x_2, y_2, z_2 \dots$ 如此不断地进行下去。将逐次得到的 x, y, z 瞬时值，画在三维坐标空间中，这便描绘出了图(2.2.1)的奇妙而复杂的‘洛伦茨吸引子’图。

2.3 : 奇异吸引子

现在回到王二的问题：什么叫吸引子？或者说，什么叫‘动力系统’的吸引子？还有张三的问题，那个图中绕圈圈的轨道是怎么回事？

我们首先得弄清楚‘系统’这个概念。

什么是‘系统’呢？简单地说，系统是一种数学模型。是一种用以描述自然界及社会中各类事件的，由一些变量及数个方程构成的一种数学模型。世界上的事物尽管千变万化，繁杂纷纭，但在数学家们的眼中，在一定的条件下，都不外乎是由几个变量和这些变量之间的关系组成的‘系统’。在这些‘系统’模型中，变量的数目或多或少，服从的规律可简可繁，变量的性质也许是确定的，也许是随机的，每个系统又可能包含另外的‘子系统’。

由‘系统’性质之不同，又有了诸如‘决定性的系统’、‘随机系统’、‘封闭系统’、‘开放系统’、‘线性系统’、‘非线性系统’、‘稳定系统’、‘简单系统’、‘复杂系统’等等一类的名词。

例如：地球环绕太阳的运动，可近似为一个简单的二体系统；密闭罐中的化学反应，可当成趋于稳定状态的封闭系统；每一个生物体，都是一个自适应的开放系统；人类社会，股票市场，则可作为复杂的、随机性系统的例子。

无论是何种系统，大多数的情形下，我们感兴趣的是系统对时间的变化，称其为‘动力系统’研究。这是理所当然的，谁会去管那种固定不变的系统呢？研究系统对时间变化的一个有效而直观的方法就是利用系统的‘相空间’，一个系统中的所有独立变量构成的空间

叫做系统的‘相空间’。相空间中的一个点，确定了系统的一个‘状态’，对应于一组给定的独立变量值。研究状态点随着时间在相空间中的‘运动’情形，则可看出系统对时间的变化趋势，以观察混沌理论中最感兴趣的‘动力系统的长期行为’。

状态点在相空间中运动，最后趋向的极限图形，就叫做该系统的‘吸引子’。

换句通俗的话说，吸引子就是一个系统的‘最后归属’。

举几个简单例子，更易于说明问题。一个被踢出去的足球，在空中飞了一段距离之后，掉到地上，又在草地上滚了一会儿，然后静止停在地上，如果没有其它情况发生，静止不动就是它的最后归属。因此，这段足球运动的吸引子，是它的相空间中的一个固定点。

人造卫星离开地面被发射出去之后，最后进入预定的轨道，绕着地球作二维周期运动，它和地球近似构成的二体系统的吸引子，便是一个椭圆。

两种颜色的墨水被混合在一起，它们经过一段时间的扩散，互相渗透，最后趋于一种均匀混合的动态平衡状态，如果不考虑分子的布朗运动，这个系统的最后归属-吸引子，也应该是相空间的一个固定点。

在发现‘混沌现象’之前，也可以粗略地说，在洛伦茨研究他的系统的最后归属之前，吸引子的形状可归纳为如下左图所示的几种‘经典吸引子’，也称‘正常吸引子’：

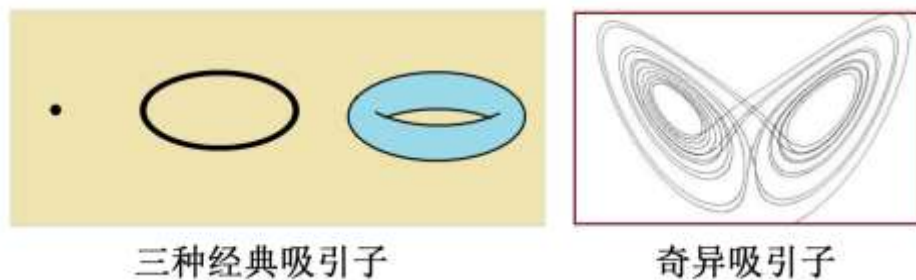


图 (2.3.1) 经典吸引子和奇异吸引子

第一种是稳定点吸引子，这种系统最后收敛于一个固定不变的状态；第二种叫极限环吸引子，这种系统的状态趋于稳定振动，比如天体的轨道运动；第三种是极限环面吸引子，这是一种似稳状态。如图 (2.3.1) 左图所示，一般地说，对应于系统的方程的解的经典吸引子是相空间中一个整数维的子空间。例如：固定点是一个零维空间；极限环是一个一维空间；而面包圈形状的极限环面吸引子则是一个二维空间。

钟摆是个简单直观的例子。任何一个摆，如果不给它不断地补充能量的话，最终都会由于摩擦和阻尼，而停止下来。也就是说，系统的最后状态是相空间中的一个点。因此，这种情况下的吸引子是第一种：固定点。如果摆有能量来源，像挂钟，有发条，或电源，不停下来的话，系统的最后状态是一种周期性运动。这种情况下的吸引子就是第二种：极限环。刚才我说的摆，都只是在一个方向摆动，设想有一个摆，如果除了左右摆动之外，上面加了一个弹簧，于是就又多了一个上下的振动，这就形成了摆的耦合振荡行为，具有两个振动频率。

王二反应快：“哦，明白了！第三种，极限‘面包圈吸引子’就是对应于好几个频率

的情形。”王二喜欢自作聪明，得意地说。可是，张三却反驳：

“好像不完全是这样。在大学一年级“普通物理”中学过的，如果这两个频率的数值成简单比率的关系，也就是说，两个频率的比值是一个有理数，那在实质上仍然是周期性运动，吸引子仍是第二种：归于极限环那种。如果这两个频率之间不成简单比率关系，也就是说，比值是一个无理数，就是那种小数表达式包含无穷多位，并且没有重现的模式数。当组合系统具有无理频率比值时，代表组合系统的相空间中的点环绕环面旋转，自身却永远不会接合起来。这样的系统看起来几乎是周期的，却永远不会精确地重复自身，被称作‘准周期的’，但是，运动轨道总是被限制在一个面包圈上，这就应该对应于图中的第三种情形。”

总而言之，用上述三种吸引子描述的自然现象还是相当规则的。这些是属于经典理论的吸引子，根据经典理论，初始值偏离一点点，结果也只会偏离一点点。因此，科学家甚至可以提前相当长的时间预测极复杂的系统的行为。这一点，是‘拉普拉斯妖’决定论的理论基础，也是洛仑兹梦想进行长期天气预报的根据。

但是，从两次计算的巨大偏差，洛仑兹感到情况不妙，于是，才想到了把他的计算结果画出来。也就是将上一章中给出的三个方程（2.2.1-3）中 x 、 y 、 z 对时间的变化曲线，画到了三维空间中，看看它到底是三种吸引子中的哪一种？

这一画就画出了一片新天地！因为洛仑兹怎么也不能把他画出的图形归类到任何一种经典吸引子。看看自己画出的图形，即图（2.3.1）的右图，洛仑兹觉得这个系统的长期行为十分有趣：似稳非稳，似乱非乱，乱中有序，稳中有乱。

这是一个三维空间里的双重绕图，轨线看起来是在绕着两个中心点转圈，但又不是真正在转圈，像张三所说的，方程解的轨道，绕来绕去绕不出个名堂！因为它们虽然被限制在两翼的边界之内，但又决不与自身相交。这意味着系统的状态永不重复，是非周期性的。也就是说，这个具有确定系数，确定方程，确定初始值的系统的解，是一个外表和整体上呈貌似规则而有序的两翼蝴蝶形态，而内在却包含了无序而随机的混沌过程的复杂结构。当时，眼光不凡的洛伦茨准确地将此现象表述为‘确定性非周期流’。他的文章发表在1963年的《大气科学》杂志上。

2.4：蝴蝶效应

“图（2.3.1）中，右边的洛仑兹吸引子，看起来就显然不同于那几个经典的。不属于经典理论的吸引子，就叫做奇异吸引子，对吧？”张三问。

对，但是我们还是得从数学上弄明白，奇异吸引子到底有哪些特别之处。我们在前一章中提到过：几个经典吸引子分别是0、1、2维的图形。那你们看看，下面图中这个画在3维空间的洛仑兹吸引子像是多少维呢？

“多少维？”王二眼睛一亮：“这个维数一定是个分数？”

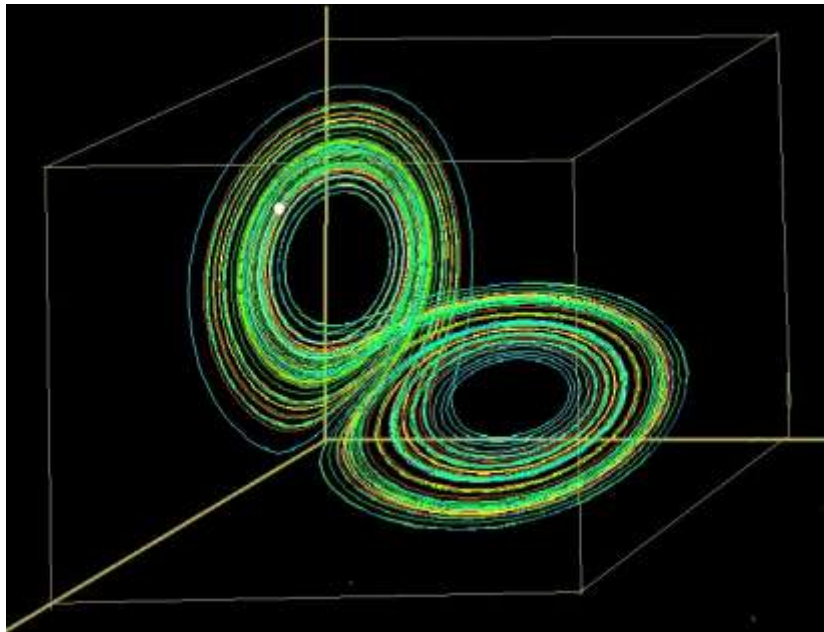


图 (2.4.1): 洛伦茨吸引子是个2.06维的分形^[C]

张三想了想说：“等等，这个图形的确像一个分形。但是分形的维数不一定是分数。图形虽然复杂，但是看起来，每个分支基本上都还是在各自的平面上转圈圈。总共是两个平面，这个图形可能还是2维。有点类似分形龙的图形那样，曲线绕来绕去，绕来绕去，最后充满一部分面积……所以我猜是2维。”

从前几章对分形的介绍中，我们已经知道：不仅有整数维的几何图形，也有分数维的几何形状存在。表现出‘混沌现象’的系统的吸引子-奇异吸引子，就是一种分形。整数维数的吸引子（正常吸引子）是光滑的周期运动解，分数维数的吸引子（奇异吸引子）则是相关于‘非线性系统’的非光滑的混沌解。图 (2.4.1) 所示的洛伦茨吸引子的曲线，只是象征性地显示了曲线的一部分。吸引子实际上是一个具有无穷结构的分形。如读者用本书最后给出的链接，到‘洛伦茨吸引子’程序，进一步观察，则会发现，状态点，也就是洛伦茨系统的解，将随着时间的流逝不重复地，无限次数地奔波于两个分支图形之间。有数学家仔细研究了洛伦茨吸引子的分形维数，得出的结果是 $2.06 (+, -) 0.01$ 。

从奇异吸引子的形状及几何性质，我们看到了混沌和分形关联的一个方面：分形是混沌的几何表述。

奇异吸引子不同于正常吸引子的另一个很重要特征是它对初始值的敏感性：前面一章中所说的三种经典吸引子对初始值都是稳定的，也就是说，初始状态接近的轨迹始终接近，偏离不远。而奇异吸引子中，初始状态接近的轨迹之间的距离却随着时间的增大而指数增加。

这就是为什么使得在数学上造诣颇深的洛伦茨迷惑的原因。因为他发现，用他的数学模型进行计算的结果大大地违背了经典吸引子应有的结论。因为给定初始值的一点点微小差别，将使得结果完全不同。这个敏感性体现在气象学中，就是说：计算结果随着被计算的天气预报的时间，成指数地放大，在洛伦茨所计算的两个月的预报之中，每隔四天的预报计算，差别就被放大一倍。因此，最后得到了显然不同的结果。

由此，洛伦茨意识到，‘长时期的气象现象是不可能被准确无误地预报的’。因为，计算结果证明：初始条件的极微小变化，可能导致预报结果的巨大差别。而气象预报的初始条件，则由极不稳定的环球的大气流所决定。这个结论被他形象地称为‘蝴蝶效应’，用以形容结果对初值的极其敏感。意思是说，只是因为巴西的一只蝴蝶抖动了一下翅膀，而改变了气象站所掌握的初始资料，三个月之后，就有可能引发美国德克萨斯州出乎意料之外地刮起一阵未曾预报到的龙卷风。用中国人的术语来说，则叫做：‘差之毫厘，失之千里’也。



图 (2.4.2): ‘蝴蝶效应’ 示意图

王二笑着说：“好像也有人说，叫做蝴蝶效应是因为洛伦兹吸引子的图看起来很像两个抖动的蝴蝶翅膀。不管怎么样，我喜欢这个名字，这个名字也启发了文学艺术家们无限的想象，产生出不少作品……”

‘洛伦兹吸引子’是第一个被深入研究的‘奇异吸引子’。洛伦兹模型是第一个被详细研究过的可产生混沌的非线性系统。

张三说：“具有‘奇异吸引子’的系统应该也是比较少的特例吧？我记得在洛伦茨的方程组中有一个叫瑞利数的参数 R ，当 $R=28$ 的时候，方程才有混沌解。在许多别的 R 值，哈哈，巴西的蝴蝶煽动不煽动翅膀都没关系的！”

可李四说，这是一个误解。其实，象洛伦茨发现的这类具有‘奇异吸引子’的系统并非什么凤毛麟角的例外，而是自然界随处可见的极普遍的现象，是经典力学所描述的事物的常规。然而，经典力学已建立三百多年，为什么经典系统的混沌现象却直到三十多年前才被发现呢？这其中的原因不外乎如下几点：一是人们的观念上总是容易被成熟的，权威的理论所束缚；二则又是与近二、三十年来计算机技术的飞速进展分不开的。洛伦兹吸引子被发现之后，许多类似的研究结果也相继问世。有趣的是，各个领域的科学家还纷纷抱怨说他们早就观测到诸如此类的现象了。可是当时，或是得不到上司的认可，或是文章难以发表，或是自己以为测量不够精确，或是认为由于噪声的影响，等等等等。总而言之，各种原因，使他们失去了千载难逢的第一个发现奇异吸引子，发现混沌现象的机会。

王二提出一个使他迷惑的问题：“刚才说到：奇异吸引子的行为广泛地存在于经典力

学所描述的现象中。这句话是什么意思啊？奇异吸引子不是与经典吸引子不同吗？”

李四说：“这儿，‘经典’这个字用得有点混淆。本来，所谓经典物理，是指有别于量子物理而言。奇异吸引子与量子物理是两回事。比如说吧，洛伦茨得到的微分方程组，是从经典物理理论、经典力学规律得到的方程组。既不是随机统计的，也与量子理论无关。但是，这种符合经典理论的方程却有混沌行为的解。”

奇异吸引子的行为广泛地存在于经典力学所描述的现象中，存在于各类非线性系统中。由于‘奇异吸引子’和‘混沌行为’是非线性系统的特点，这些发现，又将非线性数学的研究推至高潮。上个世纪的八十年代，九十年代，各门传统学科都在谱写自己的非线性篇章，即使在人文，社会学的研究系统中也发现了一批奇异吸引子和混沌运动的实例。因此，混沌理论的创立与牛顿的经典理论发生冲突，给了决定论致命的一击，拉普拉斯妖也无能为力了。

张三却仍然固执己见，说：“蝴蝶效应虽然说明了某些情况下，结果对初值非常敏感，但是，这并不等于就否定了决定论啊！比如说到洛伦茨的天气预报吧，由于混沌现象的产生，目前的计算技术使他的误差在四天后增加一倍，但是如果将来计算机的速度加快、精度提高，对初始值也测量得更准确，就可能使得误差在四十天、或四百天后，才增加一倍，这不就等于能‘准确预报’了吗？我觉得世界还是决定论的，只是计算及测量的精度问题……”

王二不同意，但却反驳不到点子上，他只是坚信决定论是不对的：

“怎么可能像拉普拉斯妖所说那样，这个世界，还有你、我、他，将来的一切都被决定了呢？我们三个人此时此刻说的每一句话都在大爆炸的那个时刻就决定了，这听起来太荒谬绝伦了吧。事情的发展太多偶然因素，不可能都是命中注定的……”

张三大笑：“你那天不是还在朗诵一首诗，说林零是你命中注定的爱人吗……”

王二急了：“唉，你不懂，那是情感的宣泄、文学的东西……不是科学……”

李四则认为，数学解决不了决定论还是非决定论的问题。就物理学的角度而言，起码有两点证据，不支持决定论。一是已经有100多年历史的量子理论的发展。量子物理中的不确定原理表明：位置和动量不可能同时确定，时间和能量也不可能同时确定。因此，初始条件是不确定的，永远不可能有所谓‘准确的初始条件’，当然，结果也就不可能确定。这是其一。

另外，经典的物理规律，大多数都是用微分方程组的数学模型来描述的。建立微分方程的目的，本来就是为了解决那些确定的、有限维的、可微的演化过程。因此，微分方程的理论是机械决定论的基础。但是，微分方程组不一定就真是描述世界所有现象的最好方法，事实上，在牛顿力学以外的许多物理现象，不能只用微分方程来研究，而对大自然中广泛存在的分形结构、物理中的湍流、布朗运动、生命形成过程，等等，微分方程理论也是勉为其难，力不从心。既然作为决定论基础的微分方程并不能用来解决世界的许多问题，“皮之不存，毛将焉附”。基础没有了，决定论失去了依托，拉普拉斯妖还有话说吗？恐怕只能躲在天国里唉声叹气了！