第 1 章

命题逻辑

1.1 引言

命题逻辑与谓词逻辑统称为**数理逻辑**(又名**符号逻辑**),是用数学方法研究推理的一门科学。旧逻辑学的创始人是公元前 4 世纪的希腊思想家亚里士多德(Aristotle);新逻辑学的创始人是 17 世纪的德国哲学家莱布尼茨(Leibniz)和 19 世纪中叶的英国数学家乔治·布尔(George Boole)。

逻辑学的主要目的是要探索出一套完整的规则,按照这些规则可以确定任何特定的论证是否有效。这种规则称为推理规则。要想把这种推理规则应用到各个学科领域中去,就必须使用一种概括性较强,并且又是独立于任何特定的论证或者所涉及的学科的语言。这种语言是一种符号化的形式语言,它没有二义性。使用这种形式化语言可以将推理过程公式化,并且依据推理规则可以机械地确定论证的有效性。

本章将介绍这套符号化形式体系的制定,以及它在命题逻辑中的应用。

1.2 命题及命题逻辑联结词

1.2.1 命题

一个具有真假意义的陈述句称为一个**命题**。也就是说,一个命题的真值只能是真或是假,不能兼而有之,也不能是疑问句或是祈使句等其他类型的句子。如果一个命题的真值是真,则用 1 或 T(True)来表示;如果一个命题的真值是假,则用 0 或 F(False)来表示。

命题用大写的英文字母,如 $P,Q,R,\cdots$来表示。

例 1.2.1 下面所举均是命题:

(1)2008 奥运会在美国举行。

(2)$2\times2=5$。

(3)闪电比雷声传播得快。

(4)$1+101=110$。

(5)程序的始祖是拜伦的独生女儿爱达。

以上命题(1)和(2)的真值是 F;(3)的真值是 T;(4)的真值则取决于采用哪种数制,若采用二进制,则取值为 T,其他进制则取值为 F;(5)的真值则取决于考证的结果。

例 1.2.2 下面所举均不是命题:

(1)我们的祖国多辽阔呀!

(2)明天开会吗?

(3)真好啊!

(4)$x+1>3$。

(5)我正在说谎。

因为(1)、(2)和(3)不是陈述句,所以它们不是命题。(4)中某些 x 能够使得 $x+1>3$ 为真,某些 x 使 $x+1>3$ 为假,x 的值不确定,因而无法确定 $x+1>3$ 的真假,所以不是命题。与例 1.2.1 中(4)的区别在于 $1+101=110$ 可以由外因也就是上下文确定其真假,而此处是内因 x 变量决定的。(5)是悖论。因为如果他确实是说谎,那么"我在说谎"便是真,于是就会得出,如果他是说谎,那么他是讲真话;另一方面,如果他确实说的是真话,那么"我正在说谎"便是假,于是会得出,如果他是讲真话,那么他是说谎。从以上分析我们只能得出这样的结论——他必须既不说谎又不讲真话,这显然是矛盾的。也就是说,对于陈述句"我正在说谎"已无法指定它的真值。这样的陈述句称为**悖论**,不是命题。

若一个命题不能再分解为更简单的命题,则这个命题称为原子命题。

例 1.2.1 中的命题均是原子命题。原子命题用大写的英文字母 $P,Q,R,\cdots$表示。

1.2.2 逻辑联结词

除了原子命题,可分解的命题称为**复合命题**或**分子命题**。例如"如果明天是晴天,那么我就去海边",就是由联结词"如果…,那么…"把两个原子命题"明天是晴天"和"我去海边"联结起来组成的复合命题。现实生活中有很多这种联结词,例如"不"、"并且"、"或者"、"当且仅当"等。在数理逻辑中,也引入联结词,它们是从现实生活中抽象出来的,但与现实生活不同,这些联结词有着严格的定义,没有二义性。例如,

P:今天下午有篮球比赛

Q:北京是中国的首都

利用逻辑联结词——否定、合取、析取、单条件和双条件等,可以分别构成新的命题如下。

$\neg P$:今天下午没有篮球比赛

$P\wedge Q$:今天下午有篮球比赛,并且北京是中国的首都

$P\rightarrow Q$:如果今天下午有篮球比赛,那么北京是中国的首都

$P\leftrightarrow Q$:今天下午有篮球比赛,当且仅当北京是中国的首都

在代数式 $x+y$ 中,x 和 y 称为运算对象,+称作运算符,$x+y$ 则表示运算结果。在命题演算中,也有同样的术语,联结词就是命题演算中的运算符,称为**逻辑运算符**或**逻辑联结词**。逻辑联结词和复合命题密切相关。下面给出 6 个常用的逻辑联结词的定义和符号表示。

1. 逻辑联结词否定——"¬"

设 P 是一个命题,则 P 的否定是一个新的命题,记作"$\neg P$",读作"非 P"。其真值是这样定义的,若 P 的真值是 T,那么$\neg P$ 的真值是 F;若 P 的真值是 F,则$\neg P$ 的真值是 T。命题 P 与其否定$\neg P$ 的关系如表 1-1 所示,它指明如何用运算对象的真值来决定一个应用运算符(即逻辑联结词)的命题的真值。这样的表称为**真值表**。利用真值表可以求出任一复合命题的真值,并判断两个复合命题是否等价,以及一个命题是否是某些命题的逻辑结果等,这种方法称为**真值表技术**。

表 1-1 逻辑联结词"¬"的定义

P	$\neg P$		P	$\neg P$
F	T	或	0	1
T	F		1	0

真值表的左边列出运算对象真值所有可能的组合,结果命题的真值在最右边的一列给出。

例 1.2.3

(1)令 P:所有的素数都是奇数。于是$\neg P$:并非所有的素数都是奇数。

注意 翻译成“所有的素数都不是奇数”是错误的。这是因为否定是对整个命题进行的。

(2)令 Q:大连是座海滨城市。于是$\neg P$:大连不是座海滨城市。

逻辑联结词否定是一元运算符。

2. 逻辑联结词合取——“∧”

设 P 是一个命题,Q 是一个命题,那么“P 合取 Q”是一个命题,记作“$P\wedge Q$”,读作“P 与 Q”或“P 并且 Q”。它的真值是这样定义的:当且仅当 P 和 Q 的真值都为 T 时,$P\wedge Q$ 的真值才为 T,否则,$P\wedge Q$ 的真值为 F。逻辑联结词“∧”的定义如表 1-2 所示。

表 1-2 逻辑联结词“∧”的定义

P	Q	$P\wedge Q$		P	Q	$P\wedge Q$
F	F	F		0	0	0
F	T	F	或	0	1	0
T	F	F		1	0	0
T	T	T		1	1	1

例 1.2.4 令 P:今天有雨。

令 Q:王平是三好学生。

于是 $P\wedge Q$:今天有雨并且王平是三好学生。

在自然语言中,上述命题是没有意义的,因为 P 和 Q 毫不相关。但是,在数理逻辑中,P 和 Q 的合取 $P\wedge Q$ 仍可成为一个新的命题。只要 P 和 Q 的真值给定,$P\wedge Q$ 的真值即可确定。由此可以得出,数理逻辑研究的是抽象的推理,而不涉及各个命题的具体内容以及有无内在联系。

除此之外,使用逻辑联结词∧时应注意,虽然∧的使用很灵活,自然语言中的“既…又…”、“一边…一边…”、“不但…而且…”、“虽然…但是…”都可以符号化为∧,但是,并不是所有的“…与…”、“…和…”都可以符号化为∧。例如“李强与王红是同学”,“李强和王红是好朋友”,这里的“与”和“和”不代表两件事情同时存在或发生,仅仅代表了主语是两个人构成的,而整个句子依然是简单命题。

3. 逻辑联结词析取——“∨”

设 P 是一个命题,Q 是一个命题,于是“P 析取 Q”是一个新的命题,记作“$P\vee Q$”,读作“P 或 Q”或“P 析取 Q”。其真值是这样的定义的:当且仅当 P 和 Q 的真值均为 F 时,$P\vee Q$ 的真值为 F,其余情况均为 T。逻辑联结词“∧”是二元运算符,它的真值表如表 1-3 所示。

表 1-3 逻辑联结词“∨”的定义

P	Q	$P\vee Q$		P	Q	$P\vee Q$
F	F	F		0	0	0
F	T	T	或	0	1	1
T	F	T		1	0	1
T	T	T		1	1	1

从上述定义可以看出,逻辑联结词∨与自然语言中的“或”不完全相同。自然语言中的“或”具有二义性,例如,“从单位到家步行需要七或八分钟”,这里的“或”表示约数、近似数,整个句子依然是简单命题。此外,自然语言中的“或”还可以表示“可兼或”(即∨联结的两个命题可同时为真),也可以表示“排斥或”(即∨联结的两个命题不可同时为真)。而逻辑联结词∨指的仅仅是“可兼或”,并不表示其他意义的“或”。

例 1.2.5 令 P：大连电视台第三套节目今晚七点播放电视剧。

令 Q：大连电视台第三套节目今晚七点播放女排比赛。

于是命题“大连电视台第三套节目今晚七点播放电视剧或播放女排比赛”不能用 $P \vee Q$ 来表示。因为这里自然语言陈述的或是排斥或，这种意义的或我们用另一个逻辑联结词“异或”（“$\overline{\vee}$”）来表示，后面我们将给出它的定义。

例 1.2.6 令 P：张亮是跳高运动员。

令 Q：张亮是跳远运动员。

于是命题“张亮可能是跳高或跳远运动员”就可以用 $P \vee Q$ 来表示，因为这里的或是可兼或。

4. 逻辑联结词单条件——“→”

设 P 是一个命题，Q 是一个命题，那么“如果 P 则 Q”是一个新的命题，记作“$P \to Q$”，读作“如果 P 则 Q”或“如果 P 那么 Q”。其中 P 称为**前件**，Q 称为**后件**。$P \to Q$ 的真值是这样定义的：当且仅当 $P \to Q$ 的前件 P 的真值为 T，后件 Q 的真值为 F 时，$P \to Q$ 的真值为 F，否则，$P \to Q$ 的真值为 T。单条件逻辑联结词“→”的真值表如表 1-4 所示。

表 1-4 逻辑联结词“→”的定义

P	Q	$P \to Q$		P	Q	$P \to Q$
F	F	T		0	0	1
F	T	T	或	0	1	1
T	F	F		1	0	0
T	T	T		1	1	1

例 1.2.7

（1）令 P：天不下雨。

令 Q：草木枯黄。

于是 $P \to Q$：如果天不下雨，则草木枯黄。

（2）令 R：他学习用功。

令 S：他成绩优秀。

于是 $R \to S$：如果他学习用功，那么他成绩优秀。

（3）令 U：大海的颜色是蓝色的。

令 V：李老师是大学教授。

于是 $U \to V$：如果大海的颜色是蓝色的，那么李老师是大学教授。

此例中（1）和（2）是有因果关系的，而（3）在自然语言中是毫无道理的，是风马牛不相及的事情。但在命题演算中，一个单条件逻辑联结词的前件并不需要联系到它的后件，它给出的是一种实质性的因果关系，而不单单是形式上的因果关系。也就是说，只要前件 P 和后件 Q 的真值确定下来，命题 $P \to Q$ 的真值就可以确定。

在使用逻辑联结词→时，需要特别注意其真值表。当前件 P 为假时，无论后件 Q 如何，$P \to Q$ 的真值都为真。虽然难以理解，但在自然语言中，我们也经常采用这种思维。例如政治家在竞选时，可能会说“如果我当选，那么我会减税”，只有在他确实当选，但是没有减税时才被认为说了假话；若没有当选，无论是否减税，都不会被质疑说谎。

在自然语言中，“如果 P 那么 Q”为真，则说明 Q 是 P 的必要条件。在自然语言中，Q 是 P 的必要条件的叙述方式不止一种，除了“如果 P 那么 Q”，还可以描述为“只要 P 就 Q”，“因为 P 所

以 Q”，“只有 Q 才 P”，“除非 Q 才 P”等。这些叙述方式在符号化时，都应该符号化为 $P \to Q$。

5. 逻辑联结词双条件——“$\leftrightarrow$”

设 P 是一个命题，Q 是一个命题，于是，“P 等值于 Q”是一个新的命题，记作“$P \leftrightarrow Q$”，读作“P 当且仅当 Q”或“P 等值于 Q”。$P \leftrightarrow Q$ 的真值是这样定义的：当且仅当 P 和 Q 有相同的真值时，$P \leftrightarrow Q$ 的真值为 T，否则，$P \leftrightarrow Q$ 的真值为 F。$P \leftrightarrow Q$ 的真值表如表 1-5 所示。

表 1-5　逻辑联结词“$\leftrightarrow$”的定义

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

或

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例 1.2.8

(1) 程序是错的，当且仅当苹果是红的。

(2) 电灯不亮，当且仅当灯泡发生故障或开关发生故障。

(3) 王宏是三好学生，当且仅当他德、智、体全优。

令 P：程序是错的。

Q：苹果是红的。

于是(1)可表示为：$P \leftrightarrow Q$。

令 R：电灯不亮。

S：灯泡发生故障。

T：开关发生故障。

于是(2)可表示成：$R \leftrightarrow (S \vee T)$。

令 A：王宏是三好学生。

B：王宏德育是优。

C：王宏体育是优。

D：王宏智商是优。

于是(3)可表示为：$A \leftrightarrow (B \wedge D \wedge C)$。

从上面的例子可以看出，等值式也和前面的逻辑联结词 $\wedge$、$\vee$、$\to$ 一样可以毫无因果关系，而其真值仅仅从等值的定义而确定。

6. 逻辑联结词异或——“∇”

设 P 是一个命题，Q 是一个命题，于是“P 异或 Q”是一个新的命题，记作“$P \nabla Q$”，读作“P 异或 Q”。其真值是这样定义的：当且仅当 P 和 Q 有不同的真值时，$P \nabla Q$ 的真值为 T，否则，$P \nabla Q$ 的真值为 F。$P \nabla Q$ 的真值表如表 1-6 所示。

表 1-6　逻辑联结词“∇”的定义

P	Q	$P \nabla Q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

或

P	Q	$P \nabla Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

例 1.2.9

令 P:大连电视台三套节目今晚八点播放电视剧。

令 Q:大连电视台三套节目今晚八点播放女排比赛。

于是 $P\nabla Q$:大连电视台三套节目今晚八时播放电视剧或播放女排比赛。

从逻辑联结词“∇”的定义和逻辑联结词“$\leftrightarrow$”的定义不难看出,$P\nabla Q$ 与$\neg(P\leftrightarrow Q)$的真值表相同,即它们恒等(等价)。也就是说,逻辑联结词异或可以用双条件逻辑联结词及逻辑联结词否定来代替。

以上我们介绍了五个基本的逻辑联结词:$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$。它们运算的优先级为:$\neg$优先级最高,其次是$\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$。如果有括号,则括号优先,在括号里从左往右依然遵守这个顺序。

习题

1. 给出下列命题的否定命题:

   (1)大连的每条街道都临海。

   (2)每一个素数都是奇数。

2. 对下述命题用中文写出语句:

   (1) $(\neg P\wedge R)\rightarrow Q$

   (2) $Q\wedge R$

3. 将下列命题符号化,并指出其真值:

   (1)5 不是素数当且仅当 4 不是基数。

   (2)4 或 5 是偶数。

   (3)4 不是偶数或者 5 不是偶数。

   (4)4 和 5 中只有一个是偶数。

4. 给定命题 $P\rightarrow Q$,我们把 $Q\rightarrow P$、$\neg P\rightarrow\neg Q$、$\neg Q\rightarrow\neg P$ 分别称为命题 $P\rightarrow Q$ 的逆命题、反命题、逆反命题。给出下列命题的逆命题、反命题和逆反命题。

   (1)如果天不下雨,我将去公园。

   (2)仅当你去我才逗留。

   (3)如果 n 是大于 2 的正整数,那么方程 $x^n+y^n=z^n$ 无整数解。

   (4)要想身体好,天天锻炼是很有必要的。

   (5)只有支付了费用,你才能按期收到货物。

5. 设 P:离散数学是操作系统的一门先修课;Q:辣椒的原产地在中国。将下列命题用自然语言表述,并指出其真值。

   (1) $P\rightarrow Q$

   (2) $Q\rightarrow P$

   (3) $\neg Q\rightarrow P$

   (4) $Q\leftrightarrow P$

   (5) $\neg P\nabla Q$

6. 符号化下列命题。

   (1)火车恰好在我乘坐的日子晚点。

   (2)要选修数据库原理课,你必须已经选修了离散数学以及操作系统。

   (3)这本书要被出版或销毁。

   (4)每当吃海鲜王宏就会过敏。

7. 给 P 和 Q 指派真值 T,给 R 和 S 指派真值 F,求出下列命题的真值。

(1) $(\neg(P \wedge Q \vee \neg R) \vee ((Q \leftrightarrow \neg P) \rightarrow (R \vee \neg S)))$

(2) $Q \wedge (P \rightarrow Q) \rightarrow P$

(3) $(P \vee (Q \rightarrow (R \wedge \neg P))) \leftrightarrow (Q \vee \neg S)$

(4) $(P \rightarrow R) \wedge (\neg Q \rightarrow S)$

8. 构成下列公式的真值表:

(1) $Q \wedge (P \rightarrow Q) \rightarrow P$

(2) $\neg(P \vee Q \wedge R) \leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

(3) $(P \vee Q \rightarrow Q \wedge P) \rightarrow P \wedge \neg R$

(4) $\neg(P \rightarrow P \wedge \neg Q \rightarrow R) \wedge Q \vee \neg R$

9. 使用真值表证明:如果 $P \leftrightarrow Q$ 为 T,那么 $P \rightarrow Q$ 和 $Q \rightarrow P$ 都为 T,反之亦然。

10. 使用真值表证明:对于 P 和 Q 的所有值,$P \rightarrow Q$ 与 $\neg P \vee Q$ 有同样的真值。

11. 一个有两个运算对象的逻辑运算符,如果颠倒其运算对象的次序,产生一逻辑等价命题,则称此逻辑运算符是**可交换的**。

(1) 确定所给出的逻辑运算符哪些是可交换的:$\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$。

(2) 用真值表证明你的判断。

12. 设 $*$ 是具有两个运算对象的逻辑运算符,如果 $(x * y) * z$ 和 $x * (y * z)$ 逻辑等价,那么运算符 $*$ 是可结合的。

(1) 确定逻辑运算符 $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ 哪些是可结合的?

(2) 用真值表证明你的判断。

13. 令 P 表示命题"苹果是甜的",Q 表示命题"苹果是红的",R 表示命题"我买苹果"。试将下列命题符号化:

(1) 如果苹果甜而红,那么我买苹果。

(2) 苹果不是甜的。

(3) 我没买苹果,因为苹果不红也不甜。

14. 一个探险者被几个吃人者抓住了。吃人者有两种,一种是总说谎的,一种是总说真话的。除非探险者能够判断出一位指定的吃人者是总说谎的还是总说真话的,否则要被吃掉。探险者只能问吃人者一个问题。如何问?

1.3 命题变元和合式的公式

在上一节中我们曾指出,不可再分的命题称为原子命题。换句话说,不包含任何逻辑联结词的命题称为原子命题。应该指出的是,这里所说的原子命题,是指其中的原子是有了确定的真值的;否则,原子没有确定的真值指派,而其原子的取值是在{T,F}这个域上的,则称此原子为**命题变元**。由命题变元、逻辑联结词及圆括号可以构成合式公式。下面给出命题演算中合式公式的递归定义。

(1) 单个命题变元是合式公式。

(2) 如果 A 是合式公式,那么 $\neg A$ 是合式公式。

(3) 如果 A 和 B 均是合式公式,那么 $(A \wedge B)$、$(A \vee B)$、$(A \rightarrow B)$ 和 $(A \leftrightarrow B)$ 都是合式公式。

(4) 当且仅当有限次地应用(1)、(2)和(3),由逻辑联结词、圆括号所组成的有意义的符号串是合式公式。

以上定义方法称为**递归定义法**。其中(1)称为**递归定义的基础**,(2)和(3)称为**递归定义的归纳**,(4)称为**递归定义的界限**。

今后我们还会经常使用这种递归定义的方法。

按照上面的定义,下面的字符串都是合式公式:

(1)$\neg(P\wedge Q)$

(2)$\neg(P\rightarrow Q)$

(3)$(P\rightarrow(P\wedge\neg Q))$

(4)$((P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R))\leftrightarrow(S\leftrightarrow T)$

下面的字符串则不是合式公式:

(1)$(P\rightarrow Q)\rightarrow(\wedge Q)$

(2)$(P\rightarrow Q$

(3)$(P\wedge Q)\rightarrow Q)$

今后,我们把合式公式简称为命题公式。一般一个命题公式的真值是不确定的,只有当用确定的命题去取代命题公式中的命题变元,或对其中的命题变元进行真值指派时,命题公式才成为具有确定真值的命题。

给定两个命题公式,若对其中变元的所有可能的真值指派两个命题公式具有相同的真值,则称它们是相互等价的。可以利用真值表技术来判定两个命题公式的等价性。

例 1.3.1

(1)给出命题公式$\neg((P\vee Q)\wedge P)$的真值表。

(2)使用真值表技术证明:命题公式 $P\leftrightarrow Q$ 与 $P\wedge Q\vee\neg P\wedge\neg Q$ 是相互等价的。

解 构造(1)的真值表如表 1-7 所示。

表 1-7

P	Q	$P\vee Q$	$(P\vee Q)\wedge P$	$\neg((P\vee Q)\wedge P)$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	1	1	0

对于(2)构造真值表,如表 1-8 所示。

表 1-8

P	Q	$P\leftrightarrow Q$	$P\wedge Q\vee\neg P\wedge\neg Q$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

从真值表可以清楚地看出,命题公式 $P\leftrightarrow Q$ 与 $P\wedge Q\vee\neg P\wedge\neg Q$ 对于变元 P 和 Q 的各种真值指派,它们的真值表完全一致。所以它们是相互等价的。

1.4 重言式(或永真式)和永真蕴涵式

1.4.1 有关重言式的讨论

通过前面对命题公式真值表的讨论,可以清楚地看出,对于命题公式 $A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ $(n\geqslant1)$,命题变元的真值有 2^n 种不同的组合。每一种组合称为一种真值指派,也就是说,命题公式含有 n 个变元时有 2^n 种真值指派。而对应于每一组真值指派,命题公式将有一个确定的值,从而使命题公式成为具有确定真值的命题。

例 1.4.1 给出命题公式 $P\vee\neg P$、$P\wedge\neg P$ 与 $P\rightarrow Q$ 的真值表。

解 三个命题公式的真值表如表 1-9 所示。

表 1-9

P	$P\vee\neg P$	$P\wedge\neg P$	P	Q	$P\rightarrow Q$
0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1
			1	0	0
			1	1	1

在例 1.4.1 中,命题公式 $P\vee\neg P$ 和 $P\wedge\neg P$,虽然都仅含一个命题变元,都有两组真值指派,但是对应于每一组真值指派,命题公式 $P\vee\neg P$ 均取值为 1(即 T),而命题公式 $P\wedge\neg P$ 却取值为 0(即 F)。之所以有这样的结果是因为这些命题公式的真值与其变元的真值指派无关,而根本问题在于它们的自身结构。命题公式 $P\rightarrow Q$ 含有两个命题变元,有 4 组真值指派。对于第 1、2 和 4 这三组真值指派,公式取值为 1(即 T);而对于第 3 组真值指派,公式却取值为 0(即 F)。

通过上面对有关公式真值表的讨论,我们总结出如下的定义,即 1.4.2 节中给出的诸概念。

1.4.2 重言式与恒等式

不依赖于命题变元的真值指派,而总是取值为 T(即 1)的命题公式,称为**重言式**或**永真式**。

不依赖于命题变元的真值指派,而总是取值为 F(即 0)的命题公式,称为**永假式**或**矛盾式**。

至少存在一组真值指派使命题公式取值为 T 的命题公式,称为**可满足的**。

在有限步内判定一个命题公式是永真式、永假式或是可满足的问题称为命题公式的判定问题。我们主要研究重言式,因为它最有用。重言式有以下特点:

(1) 重言式的否定是一个矛盾式,一个矛盾式的否定是重言式,所以只研究其中之一即可。

(2) 重言式的析取、合取、单条件和双条件都是重言式。于是可由简单的重言式推出复杂的重言式。

(3) 由重言式可以产生许多有用的恒等式。

设 $A:A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 和 $B:B(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 是两个命题公式,这里 $P_i(i=1,2,\cdots,n)$ 不一定在两个公式中同时出现。

如果 $A\leftrightarrow B$ 是重言式,即 A 与 B 对命题变元的任何真值指派都有相同的真值,则称 A 和 B 是**逻辑恒等式**(或称为等价式),记作“$A\Leftrightarrow B$”,读作“A 恒等于 B”,或“A 等价于 B”。

注意 符号“$\leftrightarrow$”与符号“$\Leftrightarrow$”的意义是有区别的。符号“$\leftrightarrow$”是逻辑联结词,是运算符;而符号“$\Leftrightarrow$”是关系符,$A\Leftrightarrow B$ 表示 A 和 B 有逻辑等价关系。

常用的逻辑恒等式如表 1-10 所示。

表 1-10　常用逻辑恒等式

E_1	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$	交换律
E_2	$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$	
E_3	$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow Q \leftrightarrow P$	
E_4	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$	结合律
E_5	$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$	
E_6	$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R \Leftrightarrow P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)$	
E_7	$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	分配律
E_8	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	
E_9	$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$	
E_{10}	$\neg\neg P \Leftrightarrow P$	双重否定律
E_{11}	$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$	德·摩根律
E_{12}	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$	
E_{13}	$\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \nabla Q$	
E_{14}	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$	逆反律
E_{15}	$\neg P \leftrightarrow \neg Q \Leftrightarrow P \leftrightarrow Q$	
E_{16}	$P \wedge P \Leftrightarrow P$	等幂律
E_{17}	$P \vee P \Leftrightarrow P$	
E_{18}	$P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$	
E_{19}	$P \vee \neg P \Leftrightarrow T$	
E_{20}	$P \wedge T \Leftrightarrow P$	
E_{21}	$P \wedge F \Leftrightarrow F$	
E_{22}	$P \vee T \Leftrightarrow T$	
E_{23}	$P \vee F \Leftrightarrow P$	
E_{24}	$P \leftrightarrow T \Leftrightarrow P$	
E_{25}	$P \leftrightarrow F \Leftrightarrow \neg P$	
E_{26}	$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$	
E_{27}	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$	
E_{28}	$P \wedge Q \rightarrow R \Leftrightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$	输出律
E_{29}	$P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$	吸收律
E_{30}	$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$	

表中符号 P、Q、R 代表任意命题，符号 T 代表真命题，符号 F 代表假命题。

表中的公式是进行等价变换和逻辑推理的重要依据。表中的公式均可使用真值表技术得到证明，读者可作为练习。

1.4.3　永真蕴涵式的定义和常用永真蕴涵式

如果单条件联结式 $A \rightarrow B$ 是一个永真式，则称为**永真蕴涵式**，记为“$A \Rightarrow B$”，读作“A 永真蕴涵 B”。其中 A 称为 B 的**有效前提**，B 称为 A 的**逻辑结果**，可以说由 A 推出 B，也可以说 B 是由 A 推出的。从 $A \Rightarrow B$ 的定义不难看出，要证明 A 永真蕴涵 B，只要证明 $A \rightarrow B$ 是一个永真式即可。而从 $A \rightarrow B$ 的定义不难知道，要说明 $A \rightarrow B$ 是永真式，只要说明下面两点之一即可：

(1)假定前件 A 是真,若能推出后件 B 必为真,则 $A\to B$ 永真,于是 $A\Rightarrow B$。

(2)假定后件 B 是假,若能推出前件 A 必为假,则 $A\to B$ 永真,于是 $A\Rightarrow B$。

也可以用真值表法来证明永真蕴涵式,即证明对于命题公式中命题变元的所有真值指派,如果其中使逻辑前提取值为真的那些真值指派,也必然使逻辑结果取值为真,则说 $A\Rightarrow B$。

例 1.4.2 证明 $\neg Q\wedge(P\to Q)\Rightarrow\neg P$。

证明

方法一:

设 $\neg Q\wedge(P\to Q)$ 为真,于是 $\neg Q$ 与 $P\to Q$ 为真,从而得出 Q 为假,因而 $\neg P$ 为真。所以

$$\neg Q\wedge(P\to Q)\Rightarrow\neg P$$

方法二:

设 $\neg P$ 是假,于是 P 为真,这时不论 Q 是真是假,都有 $\neg Q\wedge(P\to Q)$ 为假,于是

$$\neg Q\wedge(P\to Q)\Rightarrow\neg P$$

方法三:

使用真值表技术,构造前提和结论的真值表如下:

P	Q	$\neg Q\wedge(P\to Q)$	$\neg P$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	0	0

从真值表可以看出,使 $\neg Q\wedge(P\to Q)$ 取 T 值的那些变元的真值指派,也使 $\neg P$ 取 T 值;而使 $\neg P$ 取 F 值的那些变元的真值指派,也使 $\neg Q\wedge(P\to Q)$ 取 F 值,因此,$\neg Q\wedge(P\to Q)\Rightarrow\neg P$。

常用的永真蕴涵式如表 1-11 所示。

表 1-11 常用永真蕴涵式

I_1	$P\wedge Q\Rightarrow P$	化简式
I_2	$P\wedge Q\Rightarrow Q$	
I_3	$P\Rightarrow P\vee Q$	附加式
I_4	$Q\Rightarrow P\vee Q$	
I_5	$\neg P\Rightarrow P\to Q$	
I_6	$Q\Rightarrow P\to Q$	
I_7	$\neg(P\to Q)\Rightarrow P$	
I_8	$\neg(P\to Q)\Rightarrow\neg Q$	
I_9	$\neg P,P\vee Q\Rightarrow Q$	析取三段论
I_{10}	$P,P\to Q\Rightarrow Q$	假言推论
I_{11}	$\neg Q,P\to Q\Rightarrow\neg P$	拒取式
I_{12}	$P\to Q,Q\to R\Rightarrow P\to R$	假言三段论
I_{13}	$P\vee R,P\to R,Q\to R\Rightarrow R$	二难推论
I_{14}	$P\to Q\Rightarrow R\vee P\to R\vee Q$	
I_{15}	$P\to Q\Rightarrow R\wedge P\to R\wedge Q$	
I_{16}	$P,Q\Rightarrow P\wedge Q$	

1.4.4 代入规则和替换规则

1. 代入规则

在一个重言式中，某个命题变元出现的每一处均代以同一个公式后，所得到的新的公式仍是重言式，这条规则称为**代入规则**。

这条规则之所以正确，是因为重言式的值不依赖于命题变元的真值指派。例如：

$$P \wedge \neg P \leftrightarrow F$$

现以 $R \wedge Q$ 代 P 得

$$(R \wedge Q) \wedge \neg(R \wedge Q) \leftrightarrow F$$

仍是重言式。

2. 替换规则

设有恒等式 $A \Leftrightarrow B$，若在公式 C 中出现 A 的地方替换以 B（不一定是每一处都进行）而得到公式 D，则 $C \Leftrightarrow D$，这条规则称为**替换规则**。

如果 A 是公式 C 中完整的部分，且 A 是合式公式，则称 A 是 C 的**子公式**。规则中"公式 C 中出现 A"意即"A 是 C 的子公式"。

这条规则之所以正确，是因为在公式 C 和 D 中除替换部分以外均相同，所以 C 和 D 的真值也相同，故 $C \Leftrightarrow D$。

应用代入规则和替换规则及已有的重言式可以证明新的重言式。

例如，对公式 E_{11}：$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$，我们以 $A \wedge B$ 代替 E_{11} 中的 P，而以 $\neg A \wedge \neg B$ 代替 E_{11} 中的 Q，就得出公式

$$\neg((A \wedge B) \wedge (\neg A \wedge \neg B)) \Leftrightarrow \neg(A \wedge B) \vee \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

对公式 E_{20}：$P \wedge T \Leftrightarrow P$，我们利用公式 $P \vee \neg P \Leftrightarrow T$，对其中的 T 作替换（对命题常元不能作替换），得出公式

$$P \wedge (P \vee \neg P) \Leftrightarrow P$$

……

因此，我们可以说表 1-10 和表 1-11 中的字符 P、Q 和 R 不仅代表命题变元，而且可以代表命题公式；T 和 F 不仅代表真命题和假命题，而且可以代表重言式和永假式。用这样的观点看待表中的公式，应用就显得更方便了。

例 1.4.3

（1）试证 $P \wedge \neg Q \vee Q \Leftrightarrow P \vee Q$。

证明

$P \wedge \neg Q \vee Q$	
$\Leftrightarrow Q \vee P \wedge \neg Q$	E_1
$\Leftrightarrow (Q \vee P) \wedge (Q \vee \neg Q)$	E_8
$\Leftrightarrow (Q \vee P) \wedge T$	E_{19}和替换规则
$\Leftrightarrow P \vee Q$	E_{20}

（2）试证 $(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \vee R) \Leftrightarrow P \vee Q \vee R$。

证明

$$
\begin{aligned}
& (P \to Q) \to (Q \vee R) & \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee Q) \to (Q \vee R) & E_{27}\text{和替换规则} \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\neg P \vee Q) \vee (Q \vee R) & E_{27} \\
\Leftrightarrow\ & (P \wedge \neg Q) \vee (Q \vee R) & E_{12}\text{和替换规则} \\
\Leftrightarrow\ & ((P \wedge \neg Q) \vee Q) \vee R & E_{4} \\
\Leftrightarrow\ & (P \vee Q) \wedge (Q \vee \neg Q)) \vee R & \\
\Leftrightarrow\ & P \vee Q \vee R & \text{例 1.4.3(1)和替换规则}
\end{aligned}
$$

(3)试将语句“情况并非如此,如果他不来,那么我也不去”化简。

解　设 P:他来。Q:我去。于是上述语句可符号化为:

$$\neg(\neg P \to \neg Q)$$

对此式化简得

$$
\begin{aligned}
& \neg(\neg P \to \neg Q) & \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\neg\neg P \vee \neg Q) & E_{27}\text{和替换规则} \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \wedge Q &
\end{aligned}
$$

化简后的语句是:我去了,而他没来。

1.5　对偶原理

定义 1.5.1　设有公式 A,其中仅含逻辑联结词¬,∧,∨和逻辑常值 T 和 F。在 A 中将∧,∨,T,F 分别换以∨,∧,F,T 得公式 A^*,则称 A^* 为 A 的对偶式。同理,A 也可称为 A^* 的对偶式,即对偶式是相互的。

例 1.5.1

(1)$\neg P \vee (Q \vee R)$和$\neg P \wedge (Q \wedge R)$互为对偶式。

(2)$P \vee \mathrm{F}$ 和 $P \wedge \mathrm{T}$ 互为对偶式。

定理 1.5.1　设 A 和 A^* 互为对偶式,$P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是出现于 A 和 A^* 中的所有命题变元,于是

$$\neg A(P_1, P_2, \cdots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \tag{1-1}$$

$$A(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(P_1, P_2, \cdots, P_n) \tag{1-2}$$

证明　由德·摩根律

$$P \wedge Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$$
$$P \vee Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q)$$

故

$$\neg A(P_1, P_2, \cdots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n)$$

同理

$$\neg A^*(P_1, P_2, \cdots, P_n) \Leftrightarrow A(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n)$$

■

例如,在例 1.5.1(1)中

$$A(P,Q,R) \Leftrightarrow \neg P \vee (Q \vee R)$$
$$\begin{aligned}\neg A(P,Q,R) &\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee (Q \vee R)) \\ &\Leftrightarrow \neg(\neg P) \wedge \neg(Q \vee R) \\ &\Leftrightarrow \neg(\neg P) \wedge (\neg Q \wedge \neg R)\end{aligned}$$
$$A^*(P,Q,R) \Leftrightarrow \neg P \wedge (Q \wedge R)$$
$$A^*(\neg P,\neg Q,\neg R) \Leftrightarrow \neg(\neg P) \wedge (\neg Q \wedge \neg R)$$

所以

$$\neg A(P,Q,R) \Leftrightarrow A^*(\neg P,\neg Q,\neg R)$$

由于

$$A(\neg P,\neg Q,\neg R) \Leftrightarrow \neg(\neg P) \wedge (\neg Q \wedge \neg R)$$
$$\begin{aligned}\neg A^*(P,Q,R) &\Leftrightarrow \neg(\neg P) \vee \neg(Q \vee R) \\ &\Leftrightarrow \neg(\neg P) \wedge (\neg Q \wedge \neg R)\end{aligned}$$

所以

$$A(\neg P,\neg Q,\neg R) \Leftrightarrow \neg A^*(P,Q,R)$$

定理 1.5.2 若 $A \Leftrightarrow B$，且 A 与 B 为命题变元 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 及联结词 $\wedge,\vee,\neg$ 构成的公式，则 $A^* \Leftrightarrow B^*$。

证明 $A \Leftrightarrow B$ 意味着 $A(P_1,P_2,\cdots,P_n) \leftrightarrow B(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 为永真式，于是 $\neg A(P_1,P_2,\cdots,P_n) \leftrightarrow \neg B(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 为永真式，由定理 1.5.1 得 $A^*(\neg P_1,\neg P_2,\cdots,\neg P_n) \leftrightarrow B^*(\neg P_1,\neg P_2,\cdots,\neg P_n)$ 为永真式，因为上式是永真式，使用代入规则所得仍为永真式，今以 $\neg P_i$ 代 $P_i(i=1,2,\cdots,n)$，得 $A^*(P_1,P_2,\cdots,P_n) \leftrightarrow B^*(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 为永真式，所以

$$A^* \Leftrightarrow B^*$$

■

本定理称为对偶原理。

例 1.5.2 若 $(P \wedge Q) \vee (\neg P \vee (\neg P \vee Q)) \Leftrightarrow \neg P \vee Q$，试证明 $(P \vee Q) \wedge (\neg P \wedge (\neg P \wedge Q)) \Leftrightarrow \neg P \wedge Q$。

证明 由对偶原理得

$$((P \wedge Q) \vee (\neg P \vee (\neg P \vee Q)))^* \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)^*$$

即

$$(P \vee Q) \wedge (\neg P \wedge (\neg P \wedge Q)) \Leftrightarrow \neg P \wedge Q$$

定理 1.5.3 如果 $A \Rightarrow B$ 且 A 与 B 为命题变元 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 及联结词 $\wedge,\vee,\neg$ 构成的公式，则 $B^* \Rightarrow A^*$。

证明 $A \Rightarrow B$ 意味着 $A(P_1,P_2,\cdots,P_n) \to B(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 为永真式，由逆反律得 $\neg B(P_1,P_2,\cdots,P_n) \to \neg A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 为永真式，由定理 1.5.1 得 $B^*(\neg P_1,\neg P_2,\cdots,\neg P_n) \to A^*(\neg P_1,\neg P_2,\cdots,\neg P_n)$ 为永真式，因为上式是永真式，使用代入规则所得仍为永真式，今以 $\neg P_i$ 代 $P_i(i=1,2,\cdots,n)$，得 $B^*(P_1,P_2,\cdots,P_n) \to A^*(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 为永真式，于是有

$$B^* \Rightarrow A^*$$

■

习题

1. 指出下列命题公式哪些是重言式、永假式或可满足的。

(1) $P \vee \neg P$

(2) $P \wedge \neg P$

(3) $P \rightarrow \neg(\neg P)$

(4) $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$

(5) $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$

(6) $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$

(7) $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)) \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q)$

(8) $P \wedge (Q \vee R) \rightarrow (P \wedge Q \vee P \wedge R)$

(9) $P \wedge \neg P \rightarrow Q$

(10) $P \vee \neg Q \rightarrow Q$

(11) $P \rightarrow P \vee Q$

(12) $P \wedge Q \rightarrow P$

(13) $(P \wedge Q \leftrightarrow P) \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q)$

(14) $((P \rightarrow Q) \vee (R \rightarrow S)) \rightarrow ((P \vee R) \rightarrow (Q \vee S))$

2. 写出与下面给出的公式等价并且仅含联结词 $\wedge$ 及 $\neg$ 的最简公式。

(1) $\neg(P \leftrightarrow (Q \rightarrow (R \vee P)))$

(2) $((P \vee Q) \rightarrow R) \rightarrow (P \vee R)$

(3) $P \vee Q \vee \neg R$

(4) $P \vee (\neg Q \wedge R \rightarrow P)$

(5) $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$

3. 写出与下面的公式等价并且仅含联结词 $\vee$ 及 $\neg$ 的最简公式。

(1) $(P \wedge Q) \wedge \neg P$

(2) $(P \rightarrow (Q \vee \neg Q)) \wedge \neg P \wedge Q$

(3) $\neg P \wedge \neg Q \wedge (\neg R \rightarrow P)$

4. 使用常用恒等式证明下列各式,并给出下列各式的对偶式。

(1) $\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee \neg(\neg P \vee Q) \Leftrightarrow P$

(2) $(P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q)$

(3) $Q \vee \neg((\neg P \vee Q) \wedge P) \Leftrightarrow T$

5. 试证明下列合式公式是永真式。

(1) $(P \wedge Q) \rightarrow P) \leftrightarrow T$

(2) $\neg(\neg(P \vee Q) \rightarrow \neg P) \leftrightarrow F$

(3) $(Q \rightarrow P) \wedge (\neg P \rightarrow Q) \leftrightarrow P$

(4) $(P \rightarrow \neg P) \wedge (\neg P \rightarrow P) \leftrightarrow F$

6. 证明下列蕴涵式。

(1) $P \wedge Q \Rightarrow P \rightarrow Q$

(2) $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Rightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$

(3) $P \rightarrow Q \Rightarrow P \rightarrow P \wedge Q$

(4) $(P \rightarrow Q) \rightarrow Q \Rightarrow P \vee Q$

(5) $(P \vee \neg P \rightarrow Q) \rightarrow (P \vee \neg P \rightarrow R) \Rightarrow Q \rightarrow R$

(6) $(Q \rightarrow P \wedge \neg P) \rightarrow (R \rightarrow P \wedge \neg P) \Rightarrow R \rightarrow Q$

7. 对一个重言式使用代入规则后仍为一个重言式,对一个可满足式和一个矛盾式,使用代入规则后,结果如何?对重言式、可满足式和矛盾式,使用替换规则后,结果如何?

8. 求出下列各式的代入实例。

(1) $(((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P)$;用 $P \rightarrow Q$ 代 P,用 $((P \rightarrow Q) \rightarrow P)$ 代 Q。

(2) $((P\to Q)\to(Q\to P))$;用 Q 代 P,用 $\neg P$ 代 Q。

9. 证明下列等价式:

(1) $((Q\wedge A)\to C)\wedge(A\to(P\vee C))\Leftrightarrow(A\wedge(P\to Q))\to C$

(2) $(P\vee Q)\to R\Leftrightarrow(P\to R)\wedge(Q\to R)$

10. 已知 $(\neg(P\to Q)\wedge Q)\vee(\neg(\neg Q\vee P)\wedge P)$ 是矛盾式,试判断公式 $\neg(P\to Q)\wedge Q$ 以及 $\neg(\neg Q\vee P)\wedge P$ 的类型。

11. 已知 $P\to(P\vee Q)$ 是重言式,$\neg(P\to Q)\wedge Q$ 是矛盾式,试判断公式 $(P\to(P\vee Q))\wedge(\neg(P\to Q)\wedge Q)$ 以及公式 $(P\to(P\vee Q))\vee(\neg(P\to Q)\wedge Q)$ 的类型。

1.6 范式和判定问题

前面我们曾提及,在有限步内确定一个合式公式是永真的、永假的或是可满足的,这类问题称为命题公式的判定问题。

在前面的介绍中,我们已看到,由于合式公式的形式不唯一,给判定工作带来一定难度,虽然使用真值表技术可以解决命题公式的判定问题,但是,当命题变元数目多时,使用真值表技术也不是很方便。所以必须通过其他途径来解决判定问题——这就是把合式公式化为标准型(范式)。

1.6.1 析取范式和合取范式

为叙述方便,我们把合取称为积,把析取称为和。

定义 1.6.1 命题公式中的一些变元和一些变元的否定之积,称为**基本积**;一些变元和变元的否定之和,称为**基本和**。

例如,给定命题变元 P 和 Q,则 $P,Q,\neg P,\neg Q,\neg P\wedge Q,P\wedge Q,\neg P\wedge P,\neg Q\wedge P\wedge Q$ 都是基本积。而 $P,\neg P,Q,\neg Q,P\vee\neg Q,P\vee Q,P\vee\neg P,P\vee Q\vee\neg P$ 等都是基本和。

基本积(和)中的子公式称为基本积(和)的因子。

定理 1.6.1 一个基本积是永假式,当且仅当它含有 P 和 $\neg P$ 形式的两个因子。

证明(充分性) $P\wedge\neg P$ 是永假式,而 $Q\wedge F\Leftrightarrow F$,所以含有 P 和 $\neg P$ 形式的两个因子时基本积是永假式。

(必要性) 用反证法。设基本积永假但不含 P 和 $\neg P$ 形式的因子,于是给这个基本积中的命题变元指派真值 T,给带有否定的命题变元指派真值 F,得基本积的真值是 T,与假设矛盾。 ■

定理 1.6.2 一个基本和是永真式,当且仅当它含有 P 和 $\neg P$ 形式的两个因子。

证明留给读者作为练习。

定义 1.6.2 一个由基本积的和组成的公式,如果与给定的公式 A 等价,则称它是 A 的**析取范式**,记为

$$A=A_1\vee A_2\vee\cdots\vee A_n,\quad n\geqslant 1$$

其中 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是基本积。

对于任何命题公式,都可求得与其等价的析取范式,这是因为命题公式中出现的→和↔可用∧、∨和¬表达,括号可通过德・摩根律和∧对∨的分配律消去。

但是一个命题公式的析取范式不是唯一的。例如 $P\vee(Q\wedge R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge R)$,而 $P\vee(Q\wedge R)$ 与 $(P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge R)$ 都是析取范式。

如果析取范式中每个基本积都是永假式,则该式必定是永假式。

例 1.6.1

(1)求 $P \wedge (P \rightarrow Q)$ 的析取范式。

解

$$\begin{aligned} P \wedge (P \rightarrow Q) &\Leftrightarrow P \wedge (\neg P \vee Q) \\ &\Leftrightarrow (P \wedge \neg P) \vee (P \wedge Q) \\ &\Leftrightarrow F \vee (P \wedge Q) \\ &\Leftrightarrow P \wedge Q \end{aligned}$$

(2)求 $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$ 的析取范式。

解

$$\begin{aligned} &\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q) \\ \Leftrightarrow\ &\neg(P \vee Q) \wedge (P \wedge Q) \vee \neg(\neg(P \vee Q)) \wedge \neg(P \wedge Q) \\ \Leftrightarrow\ &(\neg P \wedge \neg Q \wedge P \wedge Q) \vee ((P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)) \\ \Leftrightarrow\ &F \vee (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \\ \Leftrightarrow\ &(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \\ \Leftrightarrow\ &((P \vee Q) \wedge \neg P) \vee ((P \vee Q) \wedge \neg Q) \\ \Leftrightarrow\ &P \wedge \neg P \vee \neg P \wedge Q \vee P \wedge \neg Q \vee Q \wedge \neg Q \\ \Leftrightarrow\ &F \vee \neg P \wedge Q \vee P \wedge \neg Q \vee F \\ \Leftrightarrow\ &(\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \end{aligned}$$

定义 1.6.3 一个由基本和的积组成的公式,如果与给定的命题公式 A 等价,则称它是 A 的**合取范式**,记为

$$A = A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n, \quad n \geqslant 1$$

其中 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是基本和。

对任何命题公式都可求得与其等价的合取范式,道理同析取范式。同样,一个命题公式的合取范式也不唯一。

如果一个命题公式的合取范式的每个基本和都是永真式,则该式也必定是永真式。

例 1.6.2

(1)试证 $Q \vee P \wedge \neg Q \vee \neg P \wedge \neg Q$ 是永真式。

解

$$\begin{aligned} Q \vee P \wedge \neg Q \vee \neg P \wedge \neg Q &\Leftrightarrow Q \vee (P \vee \neg P) \wedge \neg Q \\ &\Leftrightarrow Q \vee T \wedge \neg Q \\ &\Leftrightarrow Q \vee \neg Q \\ &\Leftrightarrow T \end{aligned}$$

(2)求 $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$ 的合取范式。

解 令 $A \Leftrightarrow \neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$,则

$$\begin{aligned} \neg A &\Leftrightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)) \\ &\Leftrightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \wedge (P \wedge Q) \vee (\neg(\neg(P \vee Q)) \wedge \neg(P \wedge Q))) \\ &\Leftrightarrow \neg((\neg P \wedge \neg Q \wedge P \wedge Q) \vee ((P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q))) \\ &\Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \vee P \wedge Q \end{aligned}$$

由于

$$A \Leftrightarrow \neg\neg A = \neg(\neg P \wedge \neg Q \vee P \wedge Q)$$

所以

$$A \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$$

1.6.2 主析取范式和主合取范式

定义 1.6.4 在含 n 个变元的基本积中，若每个变元与其否定不同时存在，而二者之一必出现且仅出现一次，则称这种基本积为**极小项**。

n 个变元可构成 2^n 个不同的极小项。例如，三个变元 P,Q,R 可构成 8 个极小项。我们把命题变元看成 1，命题变元的否定看成 0，于是每个极小项对应于一个二进制数，也对应于一个十进制数。对应情况如下：

$$\begin{array}{ll}
\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R & \text{——}000\text{——}0 \\
\neg P \wedge \neg Q \wedge R & \text{——}001\text{——}1 \\
\neg P \wedge Q \wedge \neg R & \text{——}010\text{——}2 \\
\neg P \wedge Q \wedge R & \text{——}011\text{——}3 \\
P \wedge \neg Q \wedge \neg R & \text{——}100\text{——}4 \\
P \wedge \neg Q \wedge R & \text{——}101\text{——}5 \\
P \wedge Q \wedge \neg R & \text{——}110\text{——}6 \\
P \wedge Q \wedge R & \text{——}111\text{——}7
\end{array}$$

把极小项对应的十进制数当作下标，并用 $m_i(i=0,1,2,\cdots,2^n-1)$ 表示这一项，即

$$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R \Leftrightarrow m_0$$
$$\neg P \wedge \neg Q \wedge R \Leftrightarrow m_1$$
$$\neg P \wedge Q \wedge \neg R \Leftrightarrow m_2$$
$$\neg P \wedge Q \wedge R \Leftrightarrow m_3$$
$$P \wedge \neg Q \wedge \neg R \Leftrightarrow m_4$$
$$P \wedge \neg Q \wedge R \Leftrightarrow m_5$$
$$P \wedge Q \wedge \neg R \Leftrightarrow m_6$$
$$P \wedge Q \wedge R \Leftrightarrow m_7$$

一般情况下，n 个变元的极小项是

$$\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \cdots \wedge \neg P_n \Leftrightarrow m_0$$
$$\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \cdots \wedge \neg P_{n-1} \wedge P_n \Leftrightarrow m_1$$
$$\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \cdots \wedge P_{n-1} \wedge \neg P_n \Leftrightarrow m_2$$
$$\cdots$$
$$P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \Leftrightarrow m_{2^n-1}$$

定义 1.6.5 一个由极小项的和组成的公式，如果与命题公式 A 等价，则称它是公式 A 的**主析取范式**。

对任何命题公式（永假式除外）都可求得与其等价的主析取范式，而且是主析取范式的形式唯一。这给范式判定问题带来很大益处。例如：

$A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$\quad \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge (R \vee \neg R) \vee (P \vee \neg P) \wedge R$

$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge R \vee \neg P \wedge R$

$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge R \wedge (Q \vee \neg Q) \vee (\neg P \wedge R) \wedge (Q \vee \neg Q)$

$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R$

$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R$

$\Leftrightarrow m_7 \vee m_6 \vee m_5 \vee m_3 \vee m_1$

$\Leftrightarrow \sum(1,3,5,6,7)$

其中,符号“$\sum$”是借用数学中求和的符号,这里代表析取。

命题公式 A 不是永真式也不是永假式,而是可满足的。关于这一点将通过考察一个命题公式的主析取范式和它的真值表的关系而得出。

下面我们来研究命题公式 $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$ 的真值表,如表 1-12 所示。

表 1-12　$A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$ 的真值表及对应的极小项

P	Q	R	极小项	$P \wedge Q \vee R$
0	0	0	$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	0
0	0	1	$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$	1
0	1	0	$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	0
0	1	1	$\neg P \wedge Q \wedge R$	1
1	0	0	$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	0
1	0	1	$P \wedge \neg Q \wedge R$	1
1	1	0	$P \wedge Q \wedge \neg R$	1
1	1	1	$P \wedge Q \wedge R$	1

从公式 $P \wedge Q \vee R$ 的真值表中不难看出,使命题公式取值为 T 的每一组变元的真值指派也使同行上的极小项取值为 T。如果我们把这些极小项析取起来,显然,它应该和命题公式 $P \wedge Q \vee R$ 是等价的。当然使命题公式取值为 F 的那些组命题变元所对应的极小项对公式是不起作用的。

如果命题公式是永真式,则对应于命题变元的所有极小项应在其主析取范式中全部出现。

如果所给命题公式是永假式,则它不存在主析取范式。

定义 1.6.6　*在含 n 个变元的基本和中,若每个变元与其否定不同时存在,而二者之一必出现且仅出现一次,则称这种基本和为***极大项**。

n 个变元可以构成 2^n 个不同的极大项。例如,三个变元 P,Q,R 可构成 8 个极大项。在极大项中,我们把命题变元看成 0,而把命题变元的否定看成 1,于是每一个极大项对应于一个二进制数,也对应一个十进制数。对应情况如下:

$P \vee Q \vee R$ ——000——0

$P \vee Q \vee \neg R$ ——001——1

$P \vee \neg Q \vee R$ ——010——2

$P \vee \neg Q \vee \neg R$ ——011——3

$\neg P \vee Q \vee R$ ——100——4

$\neg P \vee Q \vee \neg R$ ——101——5

$\neg P \vee \neg Q \vee R$ ——110——6

$\neg P \vee \neg Q \vee \neg R$ ——111——7

把极大项对应的十进制数当作下标,并用 $m_i(i=0,1,2,\cdots,2^n-1)$ 表示这一项,即

$$P \vee Q \vee R \Leftrightarrow m_0$$
$$P \vee Q \vee \neg R \Leftrightarrow m_1$$
$$P \vee \neg Q \vee R \Leftrightarrow m_2$$
$$P \vee \neg Q \vee \neg R \Leftrightarrow m_3$$
$$\neg P \vee Q \vee R \Leftrightarrow m_4$$
$$\neg P \vee Q \vee \neg R \Leftrightarrow m_5$$
$$\neg P \vee \neg Q \vee R \Leftrightarrow m_6$$
$$\neg P \vee \neg Q \vee \neg R \Leftrightarrow m_7$$

一般地，n 个变元的极大项是：

$$P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n \Leftrightarrow m_0$$
$$P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_{n-1} \vee \neg P_n \Leftrightarrow m_1$$
$$P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee \neg P_{n-1} \vee P_n \Leftrightarrow m_2$$
$$\cdots$$
$$\neg P_1 \vee \neg P_2 \vee \cdots \vee \neg P_n \Leftrightarrow m_{2^n-1}$$

定义 1.6.7 一个由极大项的积组成的公式，如果与命题公式 A 等价，则称它是 A 的**主合取范式**。

对任何命题公式（永真式除外）都可求得与其等价的主合取范式，且主合取范式的形式唯一。

例如：

$$\begin{aligned}
A &\Leftrightarrow P \wedge Q \vee R \\
&\Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R) \\
&\Leftrightarrow (P \vee R) \vee (Q \wedge \neg Q) \wedge (Q \vee R) \vee (P \wedge \neg P) \\
&\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \\
&\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \\
&\Leftrightarrow m_0 \wedge m_2 \wedge m_4 \\
&\Leftrightarrow \prod(0,2,4)
\end{aligned}$$

其中符号“$\prod$”是借用数学中求积的符号，这里代表合取。

从 A 的主合取范式，立刻可以判断出 A 是可满足的。下面通过考察 $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$ 及其真值表（如表 1-13 所示）来说明极大项和主合取范式的关系及极大项和极小项的关系。

表 1-13 $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$ 的真值表及对应的极大项

P	Q	R	极大项	$P \wedge Q \vee R$
0	0	0	$P \vee Q \vee R$	0
0	0	1	$P \vee Q \vee \neg R$	1
0	1	0	$P \vee \neg Q \vee R$	0
0	1	1	$P \vee \neg Q \vee \neg R$	0
1	0	0	$\neg P \vee Q \vee R$	0
1	0	1	$\neg P \vee Q \vee \neg R$	1
1	1	0	$\neg P \vee \neg Q \vee R$	1
1	1	1	$\neg P \vee \neg Q \vee \neg R$	1

从表 1-13 中可以清楚地看出，使公式 A 取 F（即 0）的那些真值指派也必然使同行上对应的极大项取 F 值，把所有这些极大项合取起来，当然应和命题公式 A 等价，省略使命题公式 A 取 T（即 1）值的极大项，是因为合取上 T 还等价于原来的命题。

对照表 1-12 和表 1-13 我们会发现极小项 m_i 和极大项 M_i 有下列的关系式：

$$M_i \Leftrightarrow \neg m_i, m_i \Leftrightarrow \neg M_i$$

利用求一个命题公式的主析取范式和主合取范式的方法，可以很快地判断一个命题公式是永真的、永假的或是可满足的。一个命题公式是永真式，它的命题变元的所有极小项均出现在其主析取范式中，不存在与其等价的主合取范式；一个命题公式是永假式，它的命题变元的所有极大项均出现在其主合取范式中，不存在与其等价的主析取范式；一个命题公式是可满足的，它既有与其等价的主析取范式，也有与其等价的主合取范式. 通过对公式 $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$ 的讨论，不难看出通过公式直接求主析取、主合取范式的方法。从真值表中也可以看出，如果一个命题公式含有 n 个变元，则可以写出 2^n 个极小项和 2^n 个极大项，并且如果这个命题公式的主析取范式含有 $i(i<n)$ 个极小项，则它的主合取范式应含有 2^n-i 个极大项，每个极大项可由将相应 2^n-i 个极小项取否定而得到，即如果已求出一个命题公式的主析取（或主合取）范式，则可通过上面所说的关系直接写出公式的主合取（或主析取）范式。

习题

1. 求下列各式的主合取范式：
   (1) $(P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg Q)$
   (2) $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$
   (3) $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$
2. 求下列公式的主析取范式和主合取范式：
   (1) $(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (P \leftrightarrow \neg Q)$
   (2) $P \vee (\neg P \rightarrow (Q \vee (\neg Q \rightarrow R)))$
   (3) $(P \rightarrow (Q \wedge R)) \wedge (\neg P \rightarrow (\neg Q \wedge \neg R))$
   (4) $(P \wedge \neg Q \wedge S) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$
3. 用主范式法证明下列公式是否等价：
   (1) $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$ 与 $P \rightarrow (Q \wedge R)$
   (2) $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ 与 $(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$
   (3) $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$ 与 $Q \rightarrow (P \rightarrow R)$
   (4) $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$ 与 $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
   (5) $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ 与 $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \vee R$
4. 某电路中有 1 只灯泡和 3 个开关 A,B,C。已知当且仅当在下述 4 种情况之一灯亮。
   (1) C 的扳键向上，A 和 B 的扳键向下。
   (2) A 的扳键向上，B 和 C 的扳键向下。
   (3) B 和 C 的扳键都向上，A 的扳键向下。
   (4) A 和 B 的扳键都向上，C 的扳键向下。
   用 P,Q,R 分别表示 A,B,C 的扳键向上，求灯亮的逻辑表达式以及主范式。
5. 某电路中有 1 只灯泡和 3 个开关 A,B,C。当且仅当两个或两个以上的开关扳键向上时灯亮，用 P,Q,R 分别表示 A,B,C 的扳键向上，求灯亮的逻辑表达式以及主范式。
6. 在一次研讨会上，3 名与会者根据王教授的口音分别进行下述判断：甲说“王教授不是苏州人，是上海人”；乙说“王教授不是上海人，是苏州人”；丙说“王教授不是杭州人，也不是上海人”。王教授听后笑道：“你们

3 人中有 1 人全说对了,有 1 人全说错了,有 1 人对错各半。”请问王教授是哪里人?

7. 当张、王、赵、李四位同学考试成绩出来以后,有人问这 4 个人谁的成绩最好。张说“不是我”,王说“是李”,赵说“是王”,李说“不是我”。4 个人的回答只有 1 个人符合实际,问哪一位同学的成绩最好?如果有两个人成绩并列最好,是哪两位?

8. 某公司要从赵、钱、孙、李、周五名员工中派一些人出差,必须满足以下条件:

(1)如果赵去,钱也去。

(2)李、周两人中必有一人去。

(3)钱、孙两人中去且仅去一人。

(4)孙、李两人同去或者同不去。

(5)若周去,则赵、钱也同去。

该公司将如何派人出差?

1.7 命题演算的推理理论

逻辑学的主要任务是提供一套推理规则,按照公认的推理规则,从前提集合中推导出一个结论来,这样的推导过程称为演绎或形式证明。

在任何论证中,倘若认定前提是真的,从前提推导出结论的论证遵守逻辑推理规则,则认为此结论是真的,并且认为这个论证过程是**合法的**。也就是说,对于任何论证来说,人们所注意的是论证的**合法性**。数理逻辑则把注意力集中于推理规则的研究,依据这些推理规则推导出的任何结论,称为**有效结论**,而这种论证则称为**有效论证**。数理逻辑所关心的是论证的有效性而不是合法性,也就是说,数理逻辑所注重的是推理过程中推理规则使用的有效性,而并不关心前提的实际真值。

推理理论对计算机科学中的程序验证、定理的机械证明和人工智能都十分重要。

定义 1.7.1 设 $H_1, H_2, \cdots, H_m, C$ 是一些命题公式。当且仅当

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \Rightarrow C$$

称 C 是前提集合 $\{H_1, H_2, \cdots, H_m\}$ 的有效结论。

显然,给定一个前提集合和一个结论,用构成真值表的方法,在有限步内能够确定该结论是否是该前提集合的有效结论。这种方法称为真值表技术。下面举例说明这种技术。

例 1.7.1 考察结论 C 是否是下列前提 H_1、H_2 和 H_3 的有效结论:

(1)$H_1: \neg P \vee Q$

$H_2: \neg(Q \wedge \neg R)$

$H_3: \neg R$

$C: \neg P$

(2)$H_1: P \rightarrow (Q \rightarrow P)$

$H_2: P \wedge Q$

$C: R$

(3)$H_1: \neg P$

$H_2: P \vee Q$

$C: P \wedge Q$

解 首先构造(1)、(2)和(3)的真值表,分别如表 1-14、表 1-15 和表 1-16 所示。

表 1-14

$P\ Q\ R$	$\neg P\vee Q$	$\neg(Q\wedge\neg R)$	$\neg R$	$\neg P$
0 0 0	1	1	1	1
0 0 1	1	1	0	1
0 1 0	1	0	1	1
0 1 1	1	1	0	1
1 0 0	0	1	1	0
1 0 1	0	1	0	0
1 1 0	1	0	1	0
1 1 1	1	1	0	0

在表 1-14 中仅第一行各前提的真值都为 1，结论的真值也为 1，因此，(1) 的结论是有效的。

表 1-15

$P\ Q\ R$	$P\to(Q\to P)$	$P\wedge Q$	R
0 0 0	1	0	0
0 0 1	1	0	1
0 1 0	1	0	0
0 1 1	1	0	1
1 0 0	1	0	0
1 0 1	1	0	1
1 1 0	0	1	0
1 1 1	1	1	1

在表 1-15 中仅第八行上各前提的真值都为 1，结论的真值也为 1，因此，(2) 的结论也是有效的。

表 1-16

$P\ Q$	$\neg P$	$P\vee Q$	$P\wedge Q$
0 0	1	0	0
0 1	1	1	0
1 0	0	1	0
1 1	0	1	1

在表 1-16 中，前提取值均为 1 的是第二行，但结论却取值为 0，因此，(3) 的结论无效。

使用真值表技术可以证明某一个结论是否是某一组前提的有效结论，如上面所举的例子。但是，当变元多或前提规模大时，这种方法就显得不是很方便了。为此，我们介绍一套推理理论的推理规则，如果推理规则使用的有效，则说由这套推理规则所推出的结论也是有效的。

规则 P：引入一个前提称为使用一次 P 规则。

规则 T：在推导中，如果前面有一个或多个公式永真蕴涵公式 S，则可以把公式 S 引进推导过程中。换句话说，引进前面推导过程中的推理结果称为使用 T 规则。

下面举例说明如何使用 P 规则和 T 规则进行有效推理。

例 1.7.2 试证明 $\neg P$ 是 $\neg(P\wedge\neg Q)$、$\neg Q\vee R$ 和 $\neg R$ 的有效结论。

解

{1}	(1)	$\neg(P \land \neg Q)$	P 规则
{1}	(2)	$\neg P \lor Q$	T 规则, (1), E_{11}
{1}	(3)	$P \to Q$	T 规则,(2),E_{27}
{4}	(4)	$\neg Q \lor R$	P 规则
{4}	(5)	$Q \to R$	T 规则,(4),E_{27}
{1,4}	(6)	$P \to R$	T 规则,(3), (5),I_{12}
{7}	(7)	$\neg R$	P 规则
{1,4,7}	(8)	$\neg P$	T 规则,(6), (7),I_{11}

其中,第一列上花括号中的数字集合指明了本行上的公式所依赖的前提。第二列中的编号既代表了该公式又代表了该公式所处的行。最右边给出的是推理规则和注释,注释包括该行是哪行的结论及所依据的恒等式和永真蕴涵式。

规则 CP:如果能从 R 和前提集合中推导出 S,则能够从前提集合中推导出 $R \to S$。实际上,恒等式 E_{28}就可以推出规则 CP:

$$\begin{aligned}(P \land Q \to R) &\Leftrightarrow \neg(P \land Q) \lor R \\ &\Leftrightarrow \neg P \lor \neg Q \lor R \\ &\Leftrightarrow \neg P \lor (\neg Q \lor R) \\ &\Leftrightarrow P \to (Q \to R)\end{aligned}$$

设 P 表示前提的合取,Q 是任意公式,则上述恒等式可表述成:

在前提集合中,若包含附加前提 Q,并且从 $P \land Q$ 中可以推导出 R,则可从前提 P 中推导出 $Q \to R$。

例 1.7.3 证明 $R \to S$ 是前提 $P \to (Q \to S)$、Q 和$\neg R \lor P$ 的有效结论。

解 把 R 作为附加前提,首先推导出 S,再由此推导出 $R \to S$。

{1}	(1)	R	P 规则(附加前提)
{2}	(2)	$\neg R \lor P$	P 规则
{1,2}	(3)	P	T 规则,(1), (2),I_9
{4}	(4)	$P \to (Q \to S)$	P 规则
{1,2,4}	(5)	$Q \to S$	T 规则,(3), (4),I_{10}
{6}	(6)	Q	P 规则
{1,2,4,6}	(7)	S	T 规则,(5), (6),I_{10}
{1,2,4,6}	(8)	$R \to S$	CP 规则, (1), (7)

前面我们曾讨论过范式判定问题。显然,如果在有限步内能断定论证是否有效,也就解决了论证的判定问题。然而,前面讨论过的推导方法,实际上仅是部分地解决了判定问题的求解。也就是说,如果一个论证是有效的,则使用这种方法可以证明论证是有效的;反之,如果论证不是有效的,则经过有限步之后,还难于断定这个论证不是有效的。

下面介绍第四个推理规则——规则 F,也称间接证明法(或反证法)。为了说明规则 F,我们给出下面的定义和定理。

定义 1.7.2 设公式 $H_1, H_2, \cdots, H_m$ 中的原子变元是 $P_1, P_2, \cdots, P_n$。如果给各原子变元 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 指派某一个真值集合,能使 $H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_m$ 具有真值 T,则命题公式集合

$\{H_1,H_2,\cdots,H_m\}$称为**一致的**（或**相容的**）；对于各原子变元的每一个真值指派，如果命题公式$H_1,H_2,\cdots,H_m$中至少有一个是假，从而使得$H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_m$是假，则称命题公式集合$\{H_1,H_2,\cdots,H_m\}$是**不一致的**（或**不相容的**）。

设$\{H_1,H_2,\cdots,H_m\}$是一个命题公式集合，如果它们的合取蕴涵着一个永假式，即

$$H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_m\Rightarrow R\wedge\neg R$$

这里R是任何一个公式，则公式集合$\{H_1,H_2,\cdots,H_m\}$必然是非一致的。因为$R\wedge\neg R$是一个永假式，所以它充分而又必要地决定了$H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_m$是一个永假式。

在间接证明法中，就是应用了非一致的概念。

定理 1.7.1 设命题公式集合$\{H_1,H_2,\cdots,H_m,\neg C\}$是非一致的，即它蕴涵着一个永假式，则可以从前提集合$\{H_1,H_2,\cdots,H_m\}$中推导出命题公式C。

证明 因为$\{H_1,H_2,\cdots,H_m,\neg C\}$是非一致的，所以$H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge\neg C$必定是永假式。因为前提集合$\{H_1,H_2,\cdots,H_m\}$是一致的，所以能使$H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_m$的真值为 T 的真值指派，必然会使$\neg C$的真值为 F，从而使$C$的真值为 T，故有

$$H_1,H_2,\cdots,H_m\Rightarrow C$$

这样就可以从前提集合$\{H_1,H_2,\cdots,H_m\}$中推导出命题公式C。 ■

例 1.7.4 证明$\neg(P\wedge Q)$是$\neg P\wedge\neg Q$的有效结论。

解 把$\neg\neg(P\wedge Q)$作为假设前提，并证明该假设前提导致一个永假式。

{1}	(1)	$\neg\neg(P\wedge Q)$	P 规则（假设前提）
{2}	(2)	$P\wedge Q$	T 规则，(1)，E_{10}
{1}	(3)	P	T 规则，(2)，I_1
{4}	(4)	$\neg P\wedge\neg Q$	P 规则
{4}	(5)	$\neg P$	T 规则，(4)，I_1
{1,4}	(6)	$P\wedge\neg P$	T 规则，(3)，(5)，I_{16}
{1,4}	(7)	$\neg(P\wedge Q)$	F 规则，(1)，(6)

为了简化做题步骤，在推理的时候，往往可以省略第一列，也就是本行上的公式所依赖的前提，以及省略最后一列注释中标注的所依据的恒等式和永真蕴涵式。

对于同一个问题，推理方法并不唯一。

例 1.7.5 在某次比赛中，有甲、乙、丙、丁四队参赛，已知情况如下：若甲队获冠军，则乙队或丙队获亚军；若丙队获亚军，则甲队不能获冠军；若丁队获亚军，则乙队不能获亚军；甲队获冠军。请通过推理得到结论：丁队未获亚军。

解 首先将命题符号化。

令P：甲队获冠军；Q：乙队获亚军；R：丙队获亚军；S：丁队获亚军，于是命题符号化为：

$$P\to Q\nabla R,R\to\neg P,S\to\neg Q,P\Rightarrow\neg S$$

推理过程如下：

(1)	P	P 规则
(2)	$R\to\neg P$	P 规则
(3)	$\neg R$	T 规则，(1)，(2)
(4)	$P\to Q\nabla R$	P 规则
(5)	$Q\nabla R$	T 规则，(1)，(4)

(6)	Q	T 规则,(3),(5)
(7)	$S \to \neg Q$	P 规则
(8)	$\neg S$	T 规则,(6),(7)

除了直接证明法,还可以通过反证法推理,如下:

(1)	$\neg\neg S$	P 规则(假设前提)
(2)	S	T 规则,(1)
(3)	$S \to \neg Q$	P 规则
(4)	$\neg Q$	T 规则,(2),(3)
(5)	P	P 规则
(6)	$P \to Q \nabla R$	P 规则
(7)	$Q \nabla R$	T 规则,(5),(6)
(8)	R	T 规则,(4),(7)
(9)	$R \to \neg P$	P 规则
(10)	$\neg P$	T 规则,(8),(9)
(11)	$P \wedge \neg P$	T 规则,(5),(10)
(12)	$\neg S$	F 规则,(1),(11)

由以上几个例子,我们可以总结出这样的经验:推理方法不止一种,当要证明的结论是条件式时,可考虑使用 CP 规则;当要证明的结论比较简单,而仅仅使用前提推导不明显时,可考虑使用间接证明法,即 F 规则,以使推导过程变得简捷。

习题

1. 试用真值表法证明:$A \wedge E$ 不是 $A \leftrightarrow B$,$B \leftrightarrow (C \wedge D)$,$C \leftrightarrow (A \vee E)$ 和 $A \vee E$ 的有效结论。
2. H_1,H_2 和 H_3 是前提。在下列情况下,试确定结论 C 是否有效(可以使用真值表法证明)。

   (1) $H_1: P \to Q$
   $C: P \to (P \wedge Q)$

   (2) $H_1: \neg P \vee Q$
   $H_2: \neg(Q \wedge \neg R)$
   $H_3: \neg R$
   $C: \neg P$

   (3) $H_1: P \to (Q \to P)$
   $H_2: P \wedge Q$
   $C: R$

   (4) $H_1: P \to Q$
   $H_2: Q \to R$
   $C: P \to R$
3. 不构成真值表证明:$A \vee C$ 不是 $A \leftrightarrow (B \to C)$、$B \leftrightarrow (\neg A \vee \neg C)$、$C \leftrightarrow (A \vee \neg B)$ 和 B 的有效结论。
4. 使用推理的方法证明:$L \vee M$ 是 $P \wedge Q \wedge R$ 和 $(Q \leftrightarrow R) \to (L \vee M)$ 的有效结论。
5. 不构成真值表证明下列命题公式不能同时全为真。

   (1) $P \leftrightarrow Q$, $Q \to R$, $\neg R \vee S$, $\neg P \to S$, $\neg S$

   (2) $R \vee M$, $\neg P \vee S$, $\neg M$, $\neg S$
6. H_1,H_2 和 H_3 是前提,根据推理规则断定,在下列情况下 C 是否是有效结论。

(1) $H_1: P \vee Q$

$H_2: P \to R$

$H_3: Q \to R$

$C: R$

(2) $H_1: P \to (Q \to R)$

$H_2: R$

$C: P$

7. 证明下列论证的有效性。

(1) $\neg(P \wedge \neg Q), \neg Q \vee R, \neg R \Rightarrow \neg P$

(2) $(P \wedge Q) \to R, \neg R \vee \neg S, S \Rightarrow \neg P \vee \neg Q$

(3) $(P \to Q) \to R, P \wedge S, Q \wedge T \Rightarrow R$

8. 导出下列结论(如果需要,就使用规则 CP)。

(1) $\neg P \vee Q, \neg Q \vee R, R \to S \Rightarrow P \to S$

(2) $P \to Q \Rightarrow P \to (P \wedge Q)$

(3) $(P \vee Q) \to R \Rightarrow (P \wedge Q) \to R$

9. 证明下列各式的有效性(如果需要,就使用间接证明法)。

(1) $(R \to \neg Q), R \vee S, S \to \neg Q, P \to Q \Rightarrow \neg P$

(2) $S \to \neg Q, R \vee S, \neg R, P \leftrightarrow Q \Rightarrow \neg P$

(3) $\neg(P \to Q) \to \neg(R \vee S), ((Q \to P) \vee \neg R), R \Rightarrow P \leftrightarrow Q$

10. 对下面的每个前提给出一个有效结论:

(1) 只有不下雨,运动会才照常进行。运动会照常进行,所以……

(2) 只要不下雨,运动会就照常进行。运动会没有照常进行,所以……

(3) 除非不下雨并且天气不热,运动会才会照常进行。下雨了或者天气热,所以……

11. 符号化下列命题并且推理证明:

(1) 明天是晴天,或者是下雨;如果是晴天,我就去看电影;如果我去看电影,我就不看书。结论:如果我在看书,则天在下雨。

(2) 如果今天我没课,则我就去机房上机或去图书馆查资料;若机房没有空机器,那么我没法上机;今天我没课,机房也没空机器。所以今天我去图书馆查资料。

12. 符号化下列命题,并用推理方法说明谁是作案者:

(1) A 或 B 盗窃了金项链。

(2) 若 A 作案,则作案时间不在营业时间。

(3) 若 B 提供的证据正确,则货柜不上锁。

(4) 若 B 提供的证据不正确,则作案时间在营业时间。

(5) 货柜上锁。

小结

本章介绍了命题及命题联结词的定义,由命题变元、逻辑联结词和圆括号可以组成合式公式。命题合式有永真式、永假式和可满足的。此外,本章介绍了常用的恒等式和永真蕴涵式,它们是进行推理的依据。为了解决判定问题,本章给出了命题合式的标准形式——主析取范式和主合取范式。本章最后介绍了命题演算的推理规则,使用推理规则进行有效推理是命题演算的核心课题。