第3章

信用挂钩产品的研究方法

陈松男　张嘉云

信用价差（credit spead）是指投资公司债相较于投资政府公债（假设不存在违约风险）可赚取的超额收益；换句话说，信用价差即某种信用等级（如 AAA 或 BB）债券收益率与无风险债券收益率之间的差距，所以又可称作收益率价差（yield spread），而信用价差的期间结构也就是此差距的期间结构。探讨影响信用价差改变的因子不仅是许多信用风险定价模型的目标，同时也是许多金融工程研究的主题；另外，许多学者较重视信用价差背后隐含的违约概率，而非透过公司基本面信息求算出应有的信用价差和违约概率。

Duffie 和 Singleton（1999）认为定价信用风险性债券同定价无风险债券，只是折现利率是无风险利率加上一个信用风险调整项（即信用价差），且此信用风险调整项是违约强度（default intensity）和回复率（recovery rate）的函数。

Li（1998）承袭其概念，提出可借由实际市场的资料描绘收益率价差曲线（yield spread curve），再依据公司债的偿债等级和信用等级以及公司所属产业外生给定回复率，即建构出信用曲线（credit curve）。

信用曲线的建立，除一方面可得知未来的边际违约概率，另一方面更提供信用衍生产品的定价关键。下文将详细说明 Li（1998）信用曲线的建置过程。至于一揽子信用违约定价理论将于第 12 章另行介绍，并于第 13 章分析一揽子信用挂钩商品。

3.1　违约过程之定义

3.1.1　生存函数（survival function）

如图 3-1 所示，假设 T 是一连续随机变量，代表自期初（时点 0）至违约事件发生的时间长度，令 $F(t)$ 表示 T 的累积概率分配函数，即

$$F(t)=\Pr(T\leqslant t),\quad t\geqslant 0 \tag{3-1}$$

并设定

$$S(t)=1-F(t)=\Pr(T>t),\quad t\geqslant 0 \tag{3-2}$$

且 $F(0)=0$，也就是 $S(0)=1$。换言之，$F(t)$ 表示 $[0,t]$ 之间已经发生违约事件的概率，$S(t)$ 则代表 $[0,t]$ 之间仍未发生违约事件的概率，故将$S(t)$称作生存函数（survival function）。进一步定义 T 的概率密度函数 $f(t)$，用以表达在 t 时的违约密度（default density）：

$$f(t)=F'(t)=-S'(t)=\lim_{\Delta t\to 0^{+}}\frac{\Pr[t<T\leqslant t+\Delta t]}{\Delta t} \tag{3-3}$$

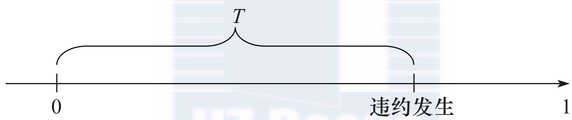

图　3-1

3.1.2　边际违约概率与边际存活概率

利用条件概率的概念，则在 $[0,x]$ 之间未发生违约事件的前提下，而于 $[x,t]$ 之间发生违约事件的概率可表示如下：

$$_{t}q_{x}=\Pr[T-x\leqslant t\,|\,T>x],\quad t\geqslant 0 \tag{3-4}$$

相对地，在 $[0,x]$ 之间未发生违约事件的前提下，而于 $[x,t]$ 之间亦未出现违约事件的概率可表示为

$$_{t}p_{x}=1-{}_{t}q_{x}=\Pr[T-x>t\,|\,T>x],\quad t\geqslant 0 \tag{3-5}$$

假如某风险性债券至第 x 期未发生违约，至下一期为止期间发生信用事件的概率称为边际违约概率，而至下一期为止仍未发生信用事件的概率则称作边际存活概率。依上述数学表示方式，即 $t=1$，省略左侧下标后可得

$$p_{x}=\Pr[T-x>1\,|\,T>x] \tag{3-6}$$

$$q_{x}=\Pr[T-x\leqslant 1\,|\,T>x] \tag{3-7}$$

3.1.3 违约强度函数（default intensity function）

由以上可知，瞬间边际违约概率为

$$\Pr[x<T\leqslant x+\Delta x\,|\,T>x]=\frac{\Pr[x<T\leqslant x+\Delta x]}{\Pr[T>x]}$$

$$=\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{1-F(x)}=\frac{f(x)}{1-F(x)}\Delta x \tag{3-8}$$

$$(\because F(x+\Delta x)\cong F(x)+f(x)\Delta x,\ \text{Taylor expansion})$$

其中

$$h(x)=\frac{f(x)}{1-F(x)}=-\frac{S'(x)}{S(x)} \tag{3-9}$$

式（3-9）被称作违约强度函数，源自精算数学中的死亡率函数（hazard rate function）。经由整理[⊖]，前所提及之 $S(t)$、$F(t)$、$f(t)$、${}_tp_x$ 及 ${}_tq_x$ 均可以违约强度函数表示如下：

$$S(t)=\mathrm{e}^{-\int_0^t h(s)\mathrm{d}s} \tag{3-10}$$

（对式（3-10）积分后，对两边取指数函数）

$$F(t)=1-S(t)=1-\mathrm{e}^{-\int_0^t h(s)\mathrm{d}s} \tag{3-11}$$

$$f(t)=S(t)\cdot h(t)=h(t)\cdot \mathrm{e}^{-\int_0^t h(s)\mathrm{d}s}\ \text{（对式（3-11）微分）} \tag{3-12}$$

$${}_tp_x=\mathrm{e}^{-\int_x^{x+t} h(s)\mathrm{d}s} \tag{3-13}$$

$${}_tq_x=1-{}_tp_x=1-\mathrm{e}^{-\int_x^{x+t} h(s)\mathrm{d}s} \tag{3-14}$$

3.2 考虑信用风险下付息公司债之定价

3.2.1 间断时间模型

Li（1998）假设一具风险性公司债在未来时点 t_1，t_2，…，t_n 时承诺偿付的现金流量分别为 C_1，C_2，…，C_n，使用零息债券价格 $P(t_0,\ t_1)$ 作为折现因子，$i=1$，2，…，n，其中 t_0 表示期初时点（现在），并令 $R(t_i)$ 代表 t_i 时违约事件发生后债权人可回收金额占原收受金额的比率，即回复率。

首先考虑在 $[t_i,\ t_{i+1}]$ 之间，如果没有违约事件发生，公司债于 t_{i+1} 时的价值是 $C_{i+1}+V(t_{i+1})$；若发生违约，价值则为 $R(t_{i+1})[C_{i+1}+V(t_{i+1})]$。假设

⊖ 通过式（3-1）及式（3-2）可得 $h(x)=\dfrac{f(x)}{1-F(x)}=\dfrac{-S'(x)}{S(x)}=-\dfrac{\mathrm{d}\ln S(x)}{\mathrm{d}x}$。

p_i 代表自 t_i 至下一期 t_{i+1} 的边际存活概率，可知风险性公司债在 t_i 时的期望现值为（参照图 3-2）

$$\begin{aligned} V(t_i) &= \frac{P(t_0, t_{i+1})}{P(t_0, t_i)}[p_i(C_{i+1} + V(t_{i+1})) + (1 - p_i)R(t_{i+1})(C_{i+1} + V(t_{i+1}))] \\ &= \frac{P(t_0, t_{i+1})}{P(t_0, t_i)}[p_i + (1 - p_i)R(t_{i+1})](C_{i+1} + V(t_{i+1})) \end{aligned} \tag{3-15}$$

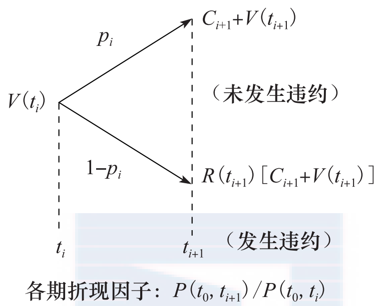

图 3-2　公司债于各期的期望现值计算说明（$i=1, 2, \cdots, n$）

借递归（recursive）概念再加上边界条件（boundary condition）：$V(t_n)=0$，即可求算在间断时间下，风险性公司债的期初价值为

$$V(t_0) = \sum_{i=1}^{n} P(t_0, t_i)\left(\prod_{j=0}^{i-1}[p_j + (1 - p_j)R(t_{j+1})]\right)C_i \tag{3-16}$$

并令

$$DC(t_i)\prod_{j=0}^{i-1}[p_j + (1 - p_j)R(t_{j+1})] = \text{信用折现因子 (credit discount factor)}$$

$$Q(t_0, t_i) = P(t_0, t_i)DC(t_i) = \text{经信用风险调整过后的折现因子 (credit risk adjusted discount factor)}$$

故式（3-16）可进一步改写如下：

$$V(t_0) = \sum_{i=1}^{n} Q(t_0, t_i)C_i \tag{3-17}$$

此外，由式（3-13）知边际存活概率 p_i 可以违约强度函数表示如下：

$$p_i = e^{-\int_{t_i}^{t_{i+1}} h(s)\mathrm{d}s} \tag{3-18}$$

若假设 $h(s)$ 呈现分段常数（piecewise constant）形式，即 $h(s)=h_i, s\in(t_{i-1}, t_i)$，则边际存活概率为

$$p_i = e^{-h_{i+1}(t_{i+1} - t_i)} \tag{3-19}$$

3.2.2 连续时间模型

连续时间下，经运算得[1]

$$p_j+(1-p_j)R(t_{j+1})\approx \mathrm{e}^{-(1-R(t_{j+1}))\int_{t_j}^{t_{j+1}}h(s)\mathrm{d}s}$$

假设两两时点间的差距（$\Delta t=t_{j+1}-t_j$）很小，信用折现因子可改写如下：

$$\begin{aligned}DC(t_i)&=\prod_{j=0}^{i-1}[p_j+(1-p_j)R(t_{j+1})]\\&\approx\prod_{j=0}^{i-1}\mathrm{e}^{-(1-R(t_{j+1}))\int_{t_j}^{t_{j+1}}h(s)\mathrm{d}s}\approx \mathrm{e}^{-\sum_{j=0}^{i-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}}(1-R(t_{j+1}))h(s)\mathrm{d}s}\end{aligned}\tag{3-20}$$

如果（0，t_i］之间被分割为 n 段，当 n 趋近于无穷大，信用折现因子可再进一步改写为

$$\lim_{n\to\infty}DC(t_i)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-\sum_{j=0}^{i-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}}(1-R(t_{j+1}))h(s)\mathrm{d}s}\approx \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t_i}[1-R(s)]h(s)\mathrm{d}s}\tag{3-21}$$

同时如果亦定义折现因子为

$$P(t_0,t_i)=\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t_i}r(s)\mathrm{d}s}\tag{3-22}$$

则风险性公司债的期初价值为

$$V(t_0)=\sum_{i=1}^{n}C_i\cdot \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t_i}[r(s)+(1-R(s))h(s)]\mathrm{d}s}\tag{3-23}$$

此处 $S_i=(1-R(t_i))h(t_i)$ 称为信用风险溢酬（或贴水）。

3.3 信用曲线的建构与应用

信用曲线的建构与应用主要过程可以分为三部分。

---

[1] 利用 $\mathrm{e}^x\approx 1+x$：

$$\begin{aligned}p_j+(1-p_j)R(t_{j+1})&=\mathrm{e}^{-\int_{t_j}^{t_{j+1}}h(s)\mathrm{d}s}+\left(1-\mathrm{e}^{-\int_{t_j}^{t_{j+1}}h(s)\mathrm{d}s}\right)R(t_{j+1})\\&\approx\left(1-\int_{t_j}^{t_{j+1}}h(s)\mathrm{d}s\right)+\left(1-\left(1-\int_{t_j}^{t_{j+1}}h(s)\mathrm{d}s\right)\right)R(t_{j+1})\\&\approx 1-\int_{t_j}^{t_{j+1}}h(s)\mathrm{d}s+\left(\int_{t_j}^{t_{j+1}}h(s)\mathrm{d}s\right)R(t_{j+1})\cdots(\mathrm{A})\\ \mathrm{e}^{-(1-R(t_{j+1}))\int_{t_j}^{t_{j+1}}h(s)\mathrm{d}s}&\approx 1+\left(-(1-R(t_{j+1}))\int_{t_j}^{t_{j+1}}h(s)\mathrm{d}s\right)\\&\approx 1-\int_{t_j}^{t_{j+1}}h(s)\mathrm{d}s+\left(\int_{t_j}^{t_{j+1}}h(s)\mathrm{d}s\right)R(t_{j+1})\cdots(\mathrm{B})\end{aligned}$$

结果：(A) = (B)。

3.3.1　基本信息搜集

搜集市场上各种到期日的无风险债券（如政府公债）和某特定信用等级的风险性债券的信息，包含价格、票面利率，并建立折现曲线（discount curve），以供计算上的折现使用。

3.3.2　求算违约强度函数

若 $h(s)$ 呈现分段常数，且回复率 R 为固定，即可使用上述信息求算各期的违约强度 h_i。在连续时间模型下，各期 h_i 所形成的曲线即为信用曲线。

3.3.3　求算边际存活概率与边际违约概率

经由式（3-22）即可求算各期的边际存活概率，同时亦可得知各期的边际违约概率。

至于较简化的做法则是，先利用市场上无风险债券和特定信用评级之风险性债券的价格，分别求算各年期的收益率，则两者间的差距即形成收益率价差曲线。又

$$P_c(t_0,t_i)=P(t_0,t_i)\exp\left(-\sum_{j=1}^{i}(1-R)h_j\cdot\Delta t_j\right)$$

$$\Rightarrow \exp(-(r_i+s_i)t_i)=\exp\left(-r_it_i-\sum_{j=1}^{i}(1-R)h_j\cdot\Delta t_j\right)$$

式中　$P_c(t_0,t_i)$——具违约风险之零息债券价格；

$P_c(t_0,t_i)$——无风险之零息债券价格；

s_i——i 年期的收益率价差（或息差）；

r_i——无风险债券之收益率。

所以

$$s_it_i=\sum_{j=1}^{i}(1-R)h_j\cdot\Delta t_j \tag{3-24}$$

即可用以计算各期之违约强度，例如：

$$s_1\cdot 1=(1-R)h_1\cdot 1$$

$$\Rightarrow h_1=s_1/(1-R)$$

$$s_2\cdot 2=(1-R)h_1\cdot 1+(1-R)h_2\cdot 1=(1-R)(h_1+h_2)$$

$$\Rightarrow h_2=(2s_2-s_1)/(1-R)$$