CHAPTER 3

第3章 损失估计

3.1 损失次数频率的二项分布估计

3.1.1 目的

掌握利用二项分布估计损失次数的频率。

3.1.2 基本原理

当每个风险单位在一定时期内最多发生一次风险事故时，可以运用二项分布来估算损失频率。当风险单位数 n 很大而每次实验中事故发生概率又较小时，可以采用泊松分布。每个风险单位在一定时期内可能发生多次风险事故，通常都可以应用泊松分布或泊松过程来描述。

对于资产总数为 n 的保单组合而言，若每个资产在给定的时间内发生损失的概率都是 p，则整个资产组合在给定的时间内发生损失的总次数 N 将服从参数为（n，p）的二项分布。即

$$P\{N = k\} = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0,1,2,\cdots,n, \quad 0 < p < 1 \tag{3-1}$$

而且有

$$E(N) = np \tag{3-2}$$

$$\mathrm{VaR}(N) = np(1 - p) \tag{3-3}$$

3.1.3 数据及内容

某公司有六栋厂房。根据火灾损失的历史资料可知，其中任何一栋在一年内发生火灾的概率都是0.08，且相互独立。一栋厂房在一年内发生两次火灾的可能性极小，可以忽略不计。试计算一下：

（1）不发生火灾的概率；

（2）两栋以上厂房发生火灾的概率；

（3）火灾发生次数的平均值和标准差。

由已知条件可知：

1）风险单位总数 $n=6$，且每栋厂房发生火灾的概率均为 $p=0.08$；

2）这六栋厂房互相独立发生火灾时不会互相影响；

3）一栋厂房在一年内发生两次火灾的可能性极小，可以认为其概率等于0。

厂房发生火灾的栋数就是贝努利实验，可以用二项分布来描述，其概率分布为

$$P\{X=x\} = C_6^x 0.08^x (1-0.08)^{6-x} \quad (x=0,1,2,\cdots,6)$$

3.1.4 操作步骤及结果

（1）在单元格区域 A9:B16 中，列出火灾损失次数频率表的表头。

（2）在单元格 B10 中输入计算公式“=BINOMDIST(A10，B6，B7，FALSE)”，然后，往下拉复制至单元格区域 B11:B16，计算出不同火灾损失次数的频率。

（3）在单元格 B18 中，输入“=B10”，计算出不发生火灾的概率；在单元格 B19 中，输入“=SUM(B13:B16)”，计算出两栋以上厂房发生火灾的概率；在单元格 B20 中输入“=B6*B7”，计算出火灾发生次数的平均值；在单元格 B21 中输入“=SQRT(B6*B7*(1-B7))”，计算出火灾发生次数的标准差。

计算结果如图 3-1 所示。

	A	B
1	六栋建筑物火灾次数估计	
2		
3	已知条件	
4	二项分布估算损失频率	
5	已知数据：	
6	n=	6
7	p=	0.08
8	计算火灾次数概率分布：	
9	发生火灾栋数	发生损失概率
10	0	0.6063550
11	1	0.3163591
12	2	0.0687737
13	3	0.0079738
14	4	0.0005200
15	5	0.0000181
16	6	0.0000003
17	计算结果：	
18	1、P（X=0）	0.6063550
19	2、P（X大于2）=	0.0085119
20	3、平均值=np	0.4800000
21	标准差=SQRT（np（1-p））	0.6645299

图 3-1 损失次数的二项分布估计

3.2 损失金额频率的正态估计

3.2.1 目的

掌握作为连续随机变量的损失金额频率的估计方法。

3.2.2 基本原理

每次风险事故所致的损失金额是连续随机变量。我们经常用连续随机变量的概率分布（如正态分布、贝塔分布、学生 t 分布等）作为每次事故所致损失金额的概率分布。对于分组损失数据而言，平均值与标准差的计算公式为

$$E(X) = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{m} f_i} \tag{3-4}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \left(\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}\right)^2} \tag{3-5}$$

式中，x_i 是组中值，f_i 是频数。

3.2.3　数据及内容

一个地区的小麦每次遭受旱灾而导致的损失金额频数统计如表 3-1 所示。

表 3-1　旱灾损失金额频数统计

损失金额（百元）	5 ~ 15	15 ~ 25	25 ~ 35	35 ~ 45	45 ~ 55	55 ~ 65	65 ~ 75
频数	4	14	28	35	20	7	2

假设该损失金额服从正态分布，要求计算：

（1）每次旱灾所致损失金额小于 500 元的概率是多少？

（2）每次旱灾所致损失金额在 4 500 元和 6 000 元之间的概率是多少？

（3）每次旱灾所致损失金额大于 7 500 元的概率是多少？

3.2.4　操作步骤及结果

（1）列表计算损失分布的期望值、标准差。根据定义，输入相应的公式计算组中值及其平方、组中值与频率的乘积、组中值与频率平方的乘积，表式如图 3-2 所示。然后在单元格 C13 中输入“ = J11/J8”，计算得到期望值；在单元格 C14 中输入“ = (J12/J8 – (J11/J8)^2)^0.5”，计算得到标准差。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		每次洪灾损失金额分布的正态估计								
2		已知数据：								
3		损失金额（百元）	5~15	15~25	25~35	35~45	45~55	55~65	65~75	
4		频数f_i	4	14	28	35	20	7	2	
5										
6		计算表：								
7		损失金额	5~15	15~25	25~35	35~45	45~55	55~65	65~75	合计
8		频数f_i	4	14	28	35	20	7	2	110
9		组中值x_i	10	20	30	40	50	60	70	280
10		组中值x_i的平方	100	400	900	1600	2500	3600	4900	14000
11		f_i*x_i	40	280	840	1400	1000	420	140	4120
12		$f_i*(x_i)^2$	400	5600	25200	56000	50000	25200	9800	172200
13		损失金额的预期值E（X）=	37.45							
14		损失金额的标准差sigma（X）=	12.75							

图 3-2　列表计算损失分布的期望值、标准差

（2）计算概率分布表。在单元格 C18 中输入“ = NORMDIST(B18，C13，C14，TRUE)”，单击确定，然后，往下拉动复制单元格区域 C19:C117，就可以得到损失金额由 100 元到 10 000 元的概率分布情况，如图 3-3 所示。

	A	B	C
16		计算累计概率分布表：	累积正态概率F（X）
17		X（百元）	
18		1	0.0021
19		2	0.0027
20		3	0.0034
21		4	0.0044
22		5	0.0055
23		6	0.0068
24		7	0.0085
25		8	0.0104
26		9	0.0128
27		10	0.0157

图 3-3　计算概率分布表

（3）计算要求的结果。可以利用概率定义与分布表计算，也可以利用概率计算函数直接计算。前者计算为，在单元格 H17、H18、H19 中，分别输入“ = C22”“ = C77 – C62”“ = 1 – C92”；后者计算为，在单元格 I17、I18、I19 中，分别输入“ = NORMDIST(5，C13，C14，TRUE)”“ = NORMDIST(60，C13，C14，TRUE) – NORMDIST(45，C13，C14， TRUE)”“=1－NORMDIST(75，C13，C14，TRUE)”；单击“确定”按钮即得三个要求计算的概率，如图 3-4 所示。

	D	E	F	G	H	I
16		要求计算的结果：			用分布表计算	用公式计算
17		小于500元的概率=			0.0055	0.0055
18		在4500元和6000元之间的概率=			0.2385	0.2385
19		大于7500元的概率=			0.0016	0.0016
20						
21						

图 3-4　计算要求的结果

3.3　总损失频率的分析计算

3.3.1　目的

掌握分析计算单一资产或资产组合的多次风险总损失的方法。

3.3.2　基本原理

利用损失次数变量的分布和每次损失额变量的分布就可以计算聚合总损失。一定时期总损失金额分布是指在已知该时期内损失次数概率分布和每次损失金额概率分布的基础上计算的累积总损失金额及其（联合）分布概率。

3.3.3　数据及内容

已知某一保险公司收集的小轿车车辆事故每年损失次数和每次损失金额的频率分布如表 3-2 所示。

表 3-2　该小轿车车辆事故每年损失次数和每次损失金额的频率分布

损失次数频率分布		每次损失金额的频率分布	
损失次数	概率	损失金额	概率
0	0.5	2 000	0.7
1	0.3	5 000	0.3
2	0.2		

要求计算年总损失金额的概率分布。

解答：根据题中材料可知，损失次数有三种可能：0 次、1 次、2 次，可得分析计算表 3-3。

表 3-3　年总损失金额的概率分布计算表

损失次数	损失次数的概率	总损失金额组合	联合概率
0	0.5	0	0.5
1	0.3	2 000	0.3×0.7＝0.24
		5 000	0.3×0.3＝0.06
2	0.2	4 000(＝2 000＋2 000)	0.2×0.7×0.7＝0.128
		7 000(＝2 000＋5 000)	0.2×0.7×0.3＝0.042
		7 000(＝5 000＋2 000)	0.2×0.3×0.7＝0.042
		10 000(＝5 000＋5 000)	0.2×0.3×0.3＝0.018

3.3.4　操作步骤及结果

（1）列出损失次数及其概率，分析填入“每次损失情况”中的每次损失金额，然后根据每次损失金额，填入对应的“损失次数概率”“第一次损失幅度概率”“第二次损失幅度概率”；

（2）在单元格 I12 输入“ = F12 ∗ G12”，再下拉复制至单元格 I13:I19，利用概率乘法原理，计算联合概率；

（3）在 J 列汇总计算损失金额，并在 K 列按损失金额汇总计算出联合概率，即得总损失金额的概率分布，结果如图 3-5 所示。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	一定时期总损失概率估计										
2											
3	已知数据										
4	损失次数分布		每次损失金额分布								
5	损失次数	概率	损失金额	概率							
6	0	0.5	2000	0.7							
7	1	0.3	5000	0.3							
8	2	0.2									
9											
10	分析计算表:					发生的概率					
11	损失次数	概率	每次损失情况		总损失金额	损失次数概率	第一次损失幅度概率	第二次损失幅度概率	联合概率	总损失金额	P
12	0	0.5	0		0	0.5	——	——	0.500	0	0.500
13	1	0.3	2000		2000	0.3	0.7	——	0.210	2000	0.210
14			5000		5000	0.3	0.3	——	0.090	5000	0.090
15	2	0.2	2000	2000	4000	0.2	0.7	0.7	0.098	4000	0.098
16			2000	5000	7000	0.2	0.7	0.3	0.042	7000	0.084
17			5000	2000	7000	0.2	0.3	0.7	0.042		
18			5000	5000	10000	0.2	0.3	0.3	0.018	10000	0.018

图 3-5　总损失金额的概率分布