

运 动 学

运动学是指对运动的研究，其中并不考虑引起运动的原因。我们有很多理由以运动学作为开始。首先，操作通常旨在将物体移来移去，因此运动学原理几乎与任何操作过程都是相关的。其次，许多操作过程在本质上完全是运动学式的，这些过程在第 1 章中被称作运动学操作，我们将在第 4 章对其进行研究。最后，运动学也是经典力学处理中传统的第一步，它在这里也起同样的作用。

本章中对于运动学的处理，与常用的处理方法有所不同，这是因为我们的目标是理解操作过程。本章将介绍刚体运动的基本原理，同时通过将这些原理用于操作来对其进行说明和诱导。对于本章中的很多概念，例如移动和转动，你可能已经很熟悉了。我们的目标是使用更精确的基础知识，来增强你的工作认识。但我们并不追求完备严谨，因为这可能会不必要地模糊和混淆对于重要概念的理解这一目标。

2.1 基础知识

在将精力专注于刚体之前，我们离题来简要考虑更广义的系统。我们将系统 (system) 考虑为处于某背景 (ambient) 空间中的一个点集。该背景空间对于平面运动学来讲是二维欧氏平面 \mathbf{E}^2 ，对于空间运动学来讲是三维欧氏空间 \mathbf{E}^3 ，对于球面运动学来讲是一个球体的表面 \mathbf{S}^2 。在一般情况下，每个点可以做独立运动。那么，一般情况下，令 \mathbf{X} 表示背景空间—— \mathbf{E}^2 、 \mathbf{E}^3 或 \mathbf{S}^2 。

定义 2.1: 一个系统 (system) 是空间 \mathbf{X} 中的一个点集。

定义 2.2: 一个系统的位形 (configuration) 是指系统中各点的位置。

定义 2.3: 位形空间 (configuration space) 是由给定系统的全部位形组成的一个度量空间。

对于全部位形组成的空间来讲，我们如何知道其中是否存在一个度量？我们可以通过如下方式在任何系统的位形空间上定义一个度量：在系统中选择一些点 $\{x_i\}$ ，然后将两个位形之间的距离 $d(D_1, D_2)$ 定义为两点之间的最大距离，即 $d(D_1, D_2) = \max\{d(D_1(x_i), D_2(x_i))\}$ 。但是请注意，该度量涉及关于 x_i 的任意选择。事实上，对于我们接下来将要考虑的很多位形空间，特别是刚体的位形空间，每一个度量都会涉及任意

选择。

定义 2.4：一个系统的自由度 (degrees of freedom) 是指其位形空间的维度。(一个不太精确但大致相当的定义是：用于确定一个位形所需的最少实数数目)。

现在我们将目光转移到刚体以及刚体运动的概念上。

定义 2.5：位移 (displacement) 是指位形的变化，该变化并不会改变系统中任意两点之间的距离，也不会改变系统的手性。

(我们使用“手性”(handedness)这一术语，而非“方向”(orientation)这一常用术语。)

定义 2.6：刚体 (rigid body) 是指仅会产生位移的一个系统。

均匀地改变物体大小的变换称为缩放变换 (scale transformation)，或称为扩张 (dilation)。改变物体手性的变换被称为反射 (reflection)。

系统	位形	自由度数目
平面内的点	x, y	2
空间中的点	x, y, z	3
平面内的刚体	x, y, θ	3
空间中的刚体	$x, y, z, \phi, \theta, \psi$	6

12

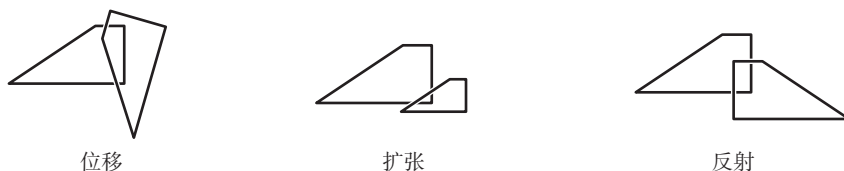


图 2-1 刚体变换和其他变换

为方便起见，考虑作用于空间中所有点上的一个位移，而不仅仅是作用于某些刚体上的点的位移。例如，考虑平面中可做刚性运动的一个三角形 (如图 2-2)。我们可以想象该三角形被绘制在一个运动平面 (moving plane) 上，我们将参考基准平面当作固定平面 (fixed plane)。三角形的任何运动决定了整个运动平面的运动。因此，我们可以谈论任意一点的运动，而对于该点实际上是否属于物体的一部分并无所谓。此外，我们可以研究平面的位移，并将其作为研究平面中任何刚体的位移的一种方法。

定义 2.7：转动 (也称旋转，rotation) 是指具有至少一个固定点的位移。

对以下两个相似概念加以区分特别重要：关于某些给定点 (诸如原点或质心) 的旋转，以及关于某个未确定点的旋转。对于一般的旋转，固定点可以处于空间中的任何地方。

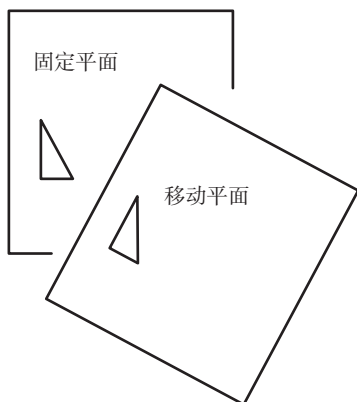


图 2-2 运动平面和固定平面

定义 2.8: 平移 (translation) 是所有点沿平行线移动相同距离的一个位移。

有时候, 在对位移的讨论中使用代数概念和表示方法会很方便。每个位移都可被描述为在基础空间中的一个操作符, 它将每个点 x 映射到某个新的点 $D(x)=x'$ 。两个位移的积对应操作符的组合叠加, 即 $(D_2 \circ D_1)(\cdot) = D_2(D_1(\cdot))$ 。一个位移的逆即是每个点映射回其原始位置的一个操作符。其中的恒等元素 (identity) 便是空位移, 它将每个点映射到自身。这些结果可以概括如下:

13

定理 2.1: 带有函数组合 (functional composition) 的位移, 构成一个群[⊖] (group)。

这些群有自己的名字。对于欧氏空间, 我们有特殊欧式群 (special Euclidean groups) $SE(2)$ 和 $SE(3)$; 对于球, 我们有特殊正交群 (special orthogonal group) $SO(3)$ 。“特殊”是指这些群能保持左右手性不变, “正交”是指这些群与正交矩阵之间的联系, 这将在第 3 章中讲解。



图 2-3 不同的旋转中心

下一个问题是“位移是否服从交换律?” 也就是说, 对于任意两个位移 D_1 和 D_2 来

⊖ 群是指一个集合以及定义该集合上的一个二元运算, 该运算需要满足封闭性、结合律、单位元和逆元这些群公理条件。如果我们可以证明某数学构造是一个群, 我们便可对其进行代数运算。群并不需要满足交换律, 满足交换律的群被称为阿贝尔群。——译者注

讲, $D_2(D_1(\cdot))=D_1(D_2(\cdot))$ 这一关系是否成立? 答案是否定的。图 2-4 给出了一个反例——两个空间旋转以不同顺序叠加组合时会得到不同的结果。

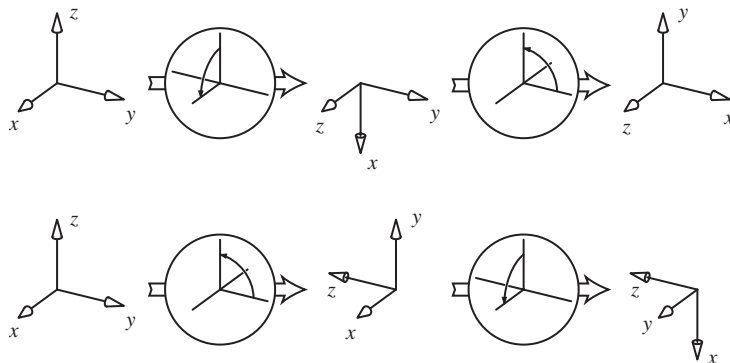


图 2-4 空间旋转一般情况下并不服从交换律

有多种不同的方法用来描述位移, 但最常用的方法是将位移分解成旋转加平移。

⊖ **定理 2.2**: 对于欧氏空间 E^2 或 E^3 中的任何位移 D 以及任意一点 O , 该位移 D 均可表述为一个平移和一个关于点 O 的旋转的叠加。

证明: 令为 O' 点 O 经过位移映射 D 后所对应的象。令 T 表示从点 O 到点 O' 的平移, 令 T^{-1} 表示它的逆。那么, 位移组合 $T^{-1} \circ D$ 将使点 O 保持不动, 因此它是一个旋转, 记为 R 。那么, $T \circ R = T \circ T^{-1} \circ D = D$ 即为期望的分解。另外一种方案是我们可以定义一个旋转 $S = D \circ T^{-1}$ 。因此, 有两种方法可将 D 分解为旋转加平移: $T \circ R$ 或者 $S \circ T$ 。 ■

从很多方面来讲, 将位移分解为旋转加平移这种操作是描述位移的一个好方法, 但要注意它并不是一个规范 (canonical) 描述——这种分解取决于参考点 O 。

推论 2.1: 给定任意一点 O , 任何微分运动或速度都可被分解为一个平移部分以及一个关于点 O 的旋转部分。

2.2 平面运动学

为了进一步探索基本的运动学, 我们必须将潜在的背景空间分开来考虑。本节重点

⊖ 定理 2.2 是最常见位移表示方式的基础; 该分解并不唯一, 它取决于点 O 的选取。另外, 该定理备注中的另一种方案有错误: 改变分解的顺序会得到相同的平移外加不同的旋转, 即 $D = T \circ R = S \circ T$, 这里 R 和 S 指代不同的旋转。正确的表述应该是: 改变分解的顺序会得到相同的旋转外加不同的平移, 即 $D = T \circ R = R \circ U$, 这里 T 和 U 通常指代不同的平移, 这是因为平面位移并不满足交换律。详细解释实例请参照作者给出的勘误表和电子教案。——译者注

介绍平面运动学。主要议题是如何将旋转和平移这些特殊情况与一般位移联系起来。定理 2.2 表明,任何位移都可被描述为平移和旋转的叠加。但是对于平面运动,我们可以走得更远——任何一个位移都可被描述为单个平移或单个旋转。事实上,如果我们在数学方面使用小的便利,平移可被看作是无穷远处的点的旋转,那么每一个平面位移都可被看作是一个旋转。首先,我们必须制定出一些关于平面中位移、旋转和平移的基本属性[⊖]。

14
15

定理 2.3: 一个平面位移可以由任意两点的运动来完全确定。

证明: 如果平面中每个点的运动都是确定的,一个平面位移可以被完全确定。给定两个点的运动,将其中的一个点选作原点,另一点处于 x 轴的正方向,选择 y 轴来组成一个右手坐标系。那么,这两点的运动决定了该坐标系的运动。给定平面上任何其他点 P 的坐标,我们可以使用坐标系来构建它所对应的象 P' 。 ■

回想一下,任意一个位移可被分解为旋转和平移的组合乘积(定理 2.2)。不幸的是,该分解依赖于参考点的选择,所以它不是一个规范描述。我们将要介绍的下一个结果给出了一种描述平面运动学的方法,通常具有更好的效果。

定理 2.4: 任何一个平面位移要么是平移,要么是旋转。

证明: 令 D 表示一个任意平面位移,令 A 表示平面中的任意一点,令 A' 表示 A 经过操作 D 之后所对应的象。如果 $A=A'$,那么根据定义, D 是一个旋转。因此我们从今以后假设 A' 与 A 不同。令 B 表示线段 $\overline{AA'}$ 的中点,令 B' 表示 B 的象。

如果 B' 与 A 、 A' 以及 B 共线,那么 B' 只有两种选择能够使其到 A' 的距离保持不变。其中一个选项是 B 固定,这将给出一个旋转结果。另一个选项给出了一个与向量 $\overline{AA'}$ 对应的平移。

剩下的唯一一种情况是 B 被映射到一个不同的 B' 点,如图 2-5 所示, B' 并不处于穿过 A 、 B 和 A' 的直线上。在点 B 处构造一个垂直于 AB 的垂线,在 B' 处构造一个垂直于 $A'B'$ 的垂线。这两条垂线并不平行,这是因为 AB 和 $A'B'$ 不平行。令 M 表示两条垂线的交点。我们将证明 M 是固定的。考虑如下位移,它将 A 映射到 A' ,同时将 M 映射到自身。这个位移将会把 B 映射到哪里呢?由于它必须要保持与 A 和 M 之间的距离不变,我们可以通过相交的圆确定两个候选项。其中一个候选项是 B 自身,由于它对应恒等元素所以将其排除。另一个候选项是 B' 。这便证明了我们“关于 M 的旋转便是原始位移 D ”这一假设。 ■

⊖ 我们为什么关注平面运动学?平面运动在三维欧氏空间 E^3 中非常常见,很多手爪和连杆机构使用平面运动,在平整地面中的多数移动机器人也使用平面运动。所有的空间运动可以分解为包含平面运动的多个元素,空间旋转与平面运动紧密相关。——译者注

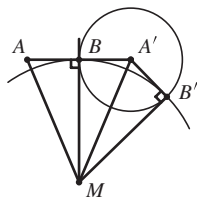


图 2-5 构造定理 2.4 的证明

平面旋转中的固定点可以很容易从 A 和 B 这两个点的运动中构造出来。我们构造 $\overline{AA'}$ 和 $\overline{BB'}$ 的垂直平分线，并令它们相交。图 2-6a 展示出了一般情形，即两条垂直平分线之间只有单个交点。我们还必须考虑其他两种可能性。如果两条垂直平分线重合，在使用任意不与 A 和 B 共线的点替代 A 或 B 之后，我们必须重复构造过程。最后一种情况是平移，此时两条垂直平分线平行，我们可以把这种情况当作绕无穷远点的旋转来处理（附录 A 中给出了关于无穷远点的简单介绍）。因此，我们重述定理 2.4 如下：

每个平面位移都是关于投影平面中一点的旋转。

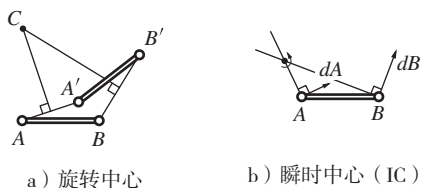


图 2-6 构建旋转中心和瞬时中心的一般情况

推论 2.2： 将其推广到微分运动（即速度），每个平面速度都是关于投影平面内一个中心点的角速度。为了构建该中心点，我们画出 dA 和 dB 的垂线，并令它们相交。

这些结果引出了一些术语，对这些术语的使用并没有严格的约定。旋转中心 (rotation center) 和旋转极点 (rotation pole) 通常是对有限旋转而言；瞬心 (Instantaneous Center, IC)、速度中心 (velocity center) 和速度极点 (velocity pole) 则是对速度而言相关的。

瞬心极迹

16
}
17

在此之前，我们都将注意力集中在单个位移上。现在我们考虑连续的运动，即对于一个物体，其位形按照一个关于时间的连续函数而变化。当将一个运动相对于时间参数化，我们使用轨迹 (trajectory) 这一术语，它可用位形空间中的一条曲线 $q(t)$ 来描述。在本节中，我们将忽略时间因素，而考虑运动的路径 (path)，它可通过位形空间中的一条曲线 $q(s)$ 来描述，这一参数化可被视为是任意的。

主要结果是：任何平面运动的路径都可通过平面内的两条曲线来描述，这些曲线被

称为瞬心极迹 (centrode)。其中的一条曲线，被称为运动瞬心极迹，它沿着另一条被称为固定瞬心极迹的曲线做无滑动的纯滚动。瞬心极迹提供了一种对平面运动的规范描述，它还有容易理解的优点。

固定瞬心极迹是指旋转极点在固定平面内的轨迹图 (locus)。运动瞬心极迹则是指旋转极点在运动平面内的轨迹图。有一点很明确：随着运动瞬心极迹在固定瞬心极迹上做无滑动的纯滚动，两条曲线的接触点即为瞬心。

使用手绘方法构建瞬心极迹，其主要难点在于在运动平面内绘制一系列中心点。最简单的方法是先建立固定瞬心极迹，然后使用透明塑料片作为运动平面，在此运动平面内绘制中心点，这样我们便可再现问题中的运动。

我们将采用图 2-7 中的平面四杆机构来说明这种方法。每个四杆机构包括：一个固定连杆；另外两个连杆，其运动是围绕固定点的旋转或沿固定轴线的平移；以及第四个连杆——耦合连杆 (coupler link)，其运动相当复杂。在给定的任何瞬间时刻，根据 A 和 B 这两点的运动所受到的约束，我们可以描述作用在耦合连杆上的约束。耦合连杆的转动中心 (瞬心) 必须处于 dA 的垂线上，同时该转动中心还必须处于 dB 的垂线上。这样可以完全确定耦合连杆的瞬心，除非该连杆机构的运动此时正在通过某些退化 (degenerate) 位形。

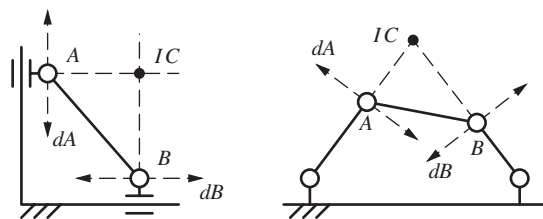


图 2-7 构建两个四杆机构的瞬心

18

该方法可总结如下：

- 1) 将约束还原为点 - 速度约束。
- 2) 在各点处构建垂直于允许速度的垂线。

3) 如果所有垂线有一个共同的交点，那么该点即为瞬心。如果所有垂线平行，我们假设交点 (瞬心) 处于无限远处。如果存在三个或更多的垂线，那么可能并不存在交点，这意味着所有运动都不可行。

通过对一个机构的几种位形重复进行上述分析，我们便可构建固定瞬心极迹和运动瞬心极迹。图 2-8 中展示出了关于瞬心极迹的例子，这些瞬心极迹对应于图 2-7 中四杆机构的耦合连杆的运动。这是一个特别有意思的机构：两个瞬心极迹是圆形的，处于耦合连杆中心线上的点扫描出了椭圆形轨迹，耦合连杆的运动扫描出了一个星形线 (astroid)。

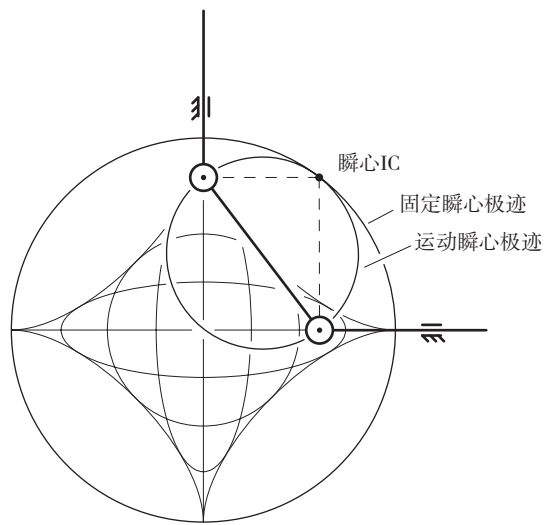
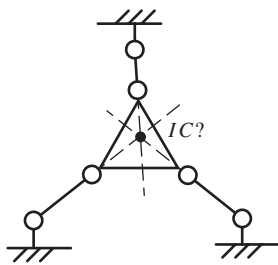


图 2-8 构建固定瞬心极迹和运动瞬心极迹



⊖图 2-9 一个假的瞬心：任何刚体运动都不可行

不过需要指出，这种方法的确有其局限性。该方法会识别出所有可行的瞬心，但它也可能识别出一个并不可行的中心——产生一个假阳性结果（false positive）。图 2-9 展示出了一个固定的五杆机构，在我们的一阶分析中它似乎存在一个旋转中心[⊖]。

2.3 球面运动学

球面运动学是指在一个球面上所有可能的运动。我们为什么要关心此类运动呢？让我们回想一下旋转的定义：其中具有一个固定点的位移。对于三维空间，这等同于一个球面上的所有可能运动，其中球心为固定点。传统上，这被称为球面运动学，但是我们更倾向于使用另一种名称，即空间旋转运动学（spatial rotation kinematics）。

球面运动学与平面运动学之间有着令人惊异的密切关系。如果我们将平面看作球

⊖ 图中的五杆机构中的耦合连杆是一个三角形，它通过另外三个连杆与固定连杆相连。在该机构内，任何形式的刚体运动都不可行。因而，上述分析方法给出了一个假阳性结果。——译者注

⊖ 更多关于平面运动机构以及瞬心极迹的动画实例，参见作者电子教案第 3 讲。——译者注

面，其半径可达到无穷大，那么平面运动学类似与球面运动学。因此，本节中的结果类似于前一小节中的结果。

定理 2.5：给定球面上的两个点，如果它们不是对极点 (antipodal)，那么球面上的位移可以通过这两点的运动而完全确定。

证明：与平面情形类似，我们使用两个点来定义一个坐标系，从而使任意一点的运动可以通过使用其坐标而确定。 ■

定理 2.6 (欧拉定理)：对于每个空间旋转，存在一条由固定点组成的直线。换言之，关于一点的任何旋转都是关于一条直线的旋转，该直线被称为旋转轴线 (rotation axis)。

19
20

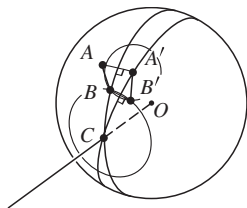


图 2-10 构建欧拉定理的证明

证明：我们将证明，对于任何一个球面位移而言，其在球面上永远存在一个固定点，由此便可证明上述定理。令 O 表示球面的球心， D 为球面上的一个给定位移。令 A 为球面上的一点， A' 为其在 D 映射下的象。如果 $A=A'$ ，那么我们便可得到想要的固定点，因此我们只考虑 A 不同于 A' 这种情形。令 $\perp AA'$ 表示球面上与 A 和 A' 等距的大圆，令 B 为 $\perp AA'$ 上的任意一点， B' 为其在 D 映射下的象。如果 $B=B'$ ，那么我们再次得到固定点，因此我们只考虑 B 和 B' 不同这种情形。定义 $\perp BB'$ 为球面上与 B 和 B' 等距的大圆。大圆 $\perp AA'$ 与大圆 $\perp BB'$ 不同，这是因为 $B \in \perp AA'$ 、并且 $B \notin \perp BB'$ 。因此，它们相交于两个对极点。令 C 表示其中任何一个对极点。

令 R 表示一个旋转，它将 A 映射到 A' ，同时将 C 映射到自身。如果我们能够证明 R 能将 B 映射到 B' ，那么 $D=R$ ，证明结束。

为了确定 $R(B)$ ，我们求解满足“刚体上任意两点间的距离在位移中保持不变”这一性质的所有点。这些点与 C 之间的距离必须正好为 $|BC|$ ，同时距离 A' 正好为 $|BA|$ 。这两个约束正好各自定义了一个圆，其中一个圆以 C 为圆心，而另一个圆则以 A' 为圆心。由于圆心 A' 和 C 并不重合，它们亦非对极点，因此这两个圆的交点最多只有两个。根据圆的构建过程， B 与 C 之间的距离正好。那么，根据在 $\perp BB'$ 上构建 C 的过程， B' 与 C 之间的距离也正好。类似的，根据在 $\perp AA'$ 上构建 B 的过程，我们还可以得知 B 与 A' 之间的距离也正好。最后， B' 与 A' 之间的距离也正好，这是因为 $A'B'$ 是 AB 在位移映射 D 作用下的象。

因此, 要么有 $R(B)=B$, 要么有 $R(B)=B'$ 。前者可以被排除, 因为这将意味着 R 是空位移 (不发生任何位移)。由于 $R(A)=A' \neq A$, 所以这种情形不可能发生。我们得到 $R(B)=B'$ 这一结论, 因此, 关于固定点 C 的旋转 R 等同于给定位移 D 。

这表明, 球面运动具有一个固定点。由于球心也是固定的, 那么每个空间旋转有两个固定点。通过这两点的直线即是所期望的转轴。容易推导得出转轴上的每个点都是固定的。

[21]

上述构造中的 M 点类似于平面位移中的旋转中心, 我们对欧拉定理[⊖]的证明类似于平面位移情形中对旋转中心存在性 (定理 2.4) 的证明。

由于球面运动学类似于平面运动学, 我们应该寻找与固定瞬心极迹和运动瞬心极迹相类似的东西。如图 2-11 所示, 任何一个球面运动都等效于以下情况: 一个运动锥面在一个固定锥面上做无滑动的纯滚动, 其中, 这两个锥面具有共同顶点。

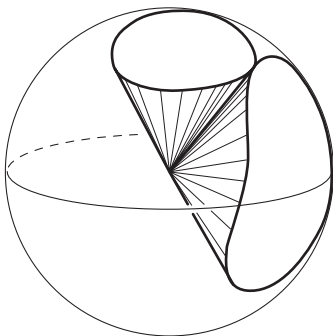


图 2-11 任何球面运动都等同于一个移动锥面在一个固定锥面上做无滑动的纯滚动

2.4 空间运动学[⊖]

我们现在考虑空间中的任意位移。回想一下: 与平面情形类似, 我们可以将位移描述为旋转与平移的叠加。这为我们提供了一种适用于空间位移的描述, 但它并非一种规范描述, 因为这种方法取决于参考点的选取。对于平面位移, 通过使用旋转中心, 我们找到了一种规范描述。同样的情况对于空间位移能否实现? 不幸的是, 并非所有的空间位移都是旋转。作为例子, 考虑图 2-12 中所示的旋量位移 (也称螺旋位移, screw displacement): 绕空间中的某条轴线旋转, 同时沿该条轴线平移。对于一般的螺旋运动,

⊖ 欧拉定理中的旋转轴线仅是一个巧合, 这是因为我们生活在三维空间 \mathbf{E}^3 中。而在二维空间 \mathbf{E}^2 和四维空间 \mathbf{E}^4 中并不存在单个旋转轴线。对于广义空间 \mathbf{E}^n 而言, 其中的每个旋转位移通常都是相对于一对轴线 (a pair of axes) 而言。——译者注

⊖ 关于二维欧氏平面、球面以及三维欧氏空间内的旋转和平移位移分类文氏图, 请参照作者电子教案第 3 讲的相关内容。——译者注

并不存在一个固定点，甚至在无穷远处也不存在固定点。处于旋量轴（screw axis）上的点沿着轴线运动，不在轴线上的点则沿螺旋线（helix）运动。由于没有固定点，所以旋量位移并不属于旋转。

不过，下一个定理将表明：所有的空间位移都属于旋量位移，并且旋量位移为空间位移提供了一种近似规范的几何描述。

定理 2.7 (CHASLES 定理)：每个空间位移都是由关于某条轴线的旋转以及沿同一轴线的平移叠加而构成的。

证明：令 D 表示任意一个空间位移，使用定理 2.2 将其分解为旋转 R 和平移 T —— $D = R \circ T$ 。现在将平移 T 分解为两个分量 T_{\perp} 和 T_{\parallel} ，它们分别垂直和平行于 R 的转轴。因此，我们现在可以得到下列分解形式 $D = R \circ T_{\perp} \circ T_{\parallel}$ 。现在 $R \circ T_{\perp}$ 是一个平面运动，因此它等效于关于一条轴线的某个旋转 S ，其旋转轴线平行于 R 的转轴。由此我们得到下列分解形式 $D = S \circ T_{\parallel}$ 。该分解即可完成证明，这是因为我们可以选取 S 的旋转轴线作为 T_{\parallel} 的轴线。 ■

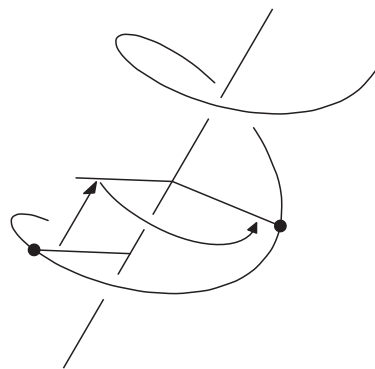


图 2-12 旋量位移把具有共同轴线的平移和旋转叠加在一起

上述证明过程表明：旋量轴有时可能在无限远处，如果我们喜欢的话，可以接受这种螺旋旋量，但这并不是必须的。只有在纯平面平移这种情形下，上述证明才会将旋量轴构建在无限远处。但是，一个纯的平移可以很简单地由一个旋转分量为零的旋量运动来表示，其轴线可以是与平移方向平行的任何直线。

旋量是一种具有强大功能的描述方法，以至于大量有关运动学的文献都用旋量理论的语言来表述，提供了无数令人浮想联翩的双关语[⊖]。我们不会很深入地去钻研旋量理论，同时我们尽量避开双关语，但适宜的时候我们将会使用旋量。

定义 2.9：旋量（screw）是空间中带有相关旋距（pitch）的一条线。其中，旋距是指旋量的线性分量与角度分量之间的比率。

将旋量想做是一个用来表示运动的几何对象，就像现在这样。但它也可以表示其他事物，特别是力和扭矩。一个附加说明：我们一定要有意地去模糊旋距（是如何得到的），是用线性分量去除以角度分量，还是反过来进行计算。选用何种方式取决于应用场景，对于运动我们用线性分量去除以角度分量，而对于力我们用角度分量去除以线性分量。对于该点的深入讨论，参见 5.1 节。

定义 2.10：运动旋量（twist）是指旋量外加一个标量幅值，它给出了关于旋量轴的

⊖ 在英语里 screw 通常用来指代“倒霉、诅咒”等。——译者注

一个旋转加上沿旋量轴的一个平移。旋转角度为运动旋量的幅值大小，而平移距离则等于该幅值与旋距的乘积。因此，旋距是平移与旋转之间的比率。

使用旋量语言，可以简述 Chasles 定理如下：每个空间位移都是关于某旋量的一个运动旋量。

对于无限小的运动，旋量有着极好的明确定义。因此，在给定时刻，任何运动都将会有一个旋量以及一个与之相关的运动旋量幅值，用以描述该运动的瞬时速度和角速度。这定义了瞬时旋量轴（instantaneous screw axis）。

正如平面运动可以通过使用瞬心极迹的运动来描述那样，空间运动可以通过一个运行在固定瞬轴面（fixed axode）上的一个运动瞬轴面（moving axode）的运动来描述。每个瞬轴面都是一个直纹面（ruled surface）。在任何特定时刻，瞬轴面与某些用于定义瞬时旋量轴的线相接触。根据旋距，运动瞬轴面随着自身的滚动还会沿这些线发生滑动。

但可惜的是，与瞬心极迹的运动相比，瞬轴面的运动难以可视化。当然，瞬心极迹（如图 2-8）和锥面（如图 2-11）可以被看作是特殊情况。图 2-13 展示出了源自文献（Reuleaux, 1876）的两个简单情形。

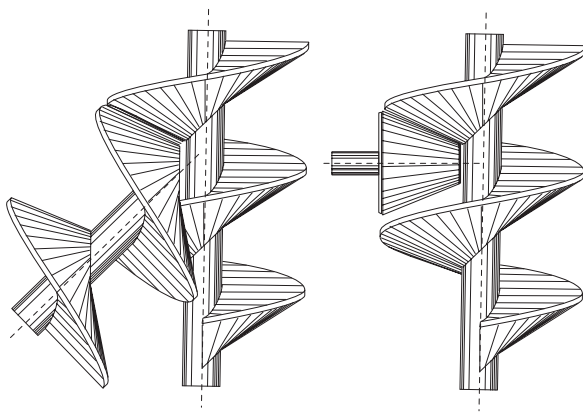


图 2-13 任何空间运动都可等效为在固定瞬轴面上的一个运动瞬轴面的运动。瞬时旋量轴为两个轴面之间的接触线

2.5 运动学约束[⊖]

操作通常会涉及接触，而接触通常可以从运动学约束（kinematic constraint）方面进

[⊖] 我们为什么要学习运动约束呢？这是因为约束是操作的基础。操作中有意思的事情大都发生在位形空间的边界上，而边界本身只占位形空间的很小一部分。最简单的机器人操作便是通过抓取，将物体连接在可编程运动装置——机械臂上，此时连接相当于一种约束。很多操作任务的目的涉及到运动约束，例如将东西放在桌面上和安装零件等。最后，我们可以使用运动约束（例如接触）来提高定位精度，降低系统中不确定性的影响。——译者注

行建模，运动学约束是指对物体可能运动的约束。考虑图 2-14a 中的例子，一个矩形块在一个通道里滑动。通常，该矩形块具有三个自由度，它们分别对应于在 x 、 y 和 θ 坐标中的自由变化。

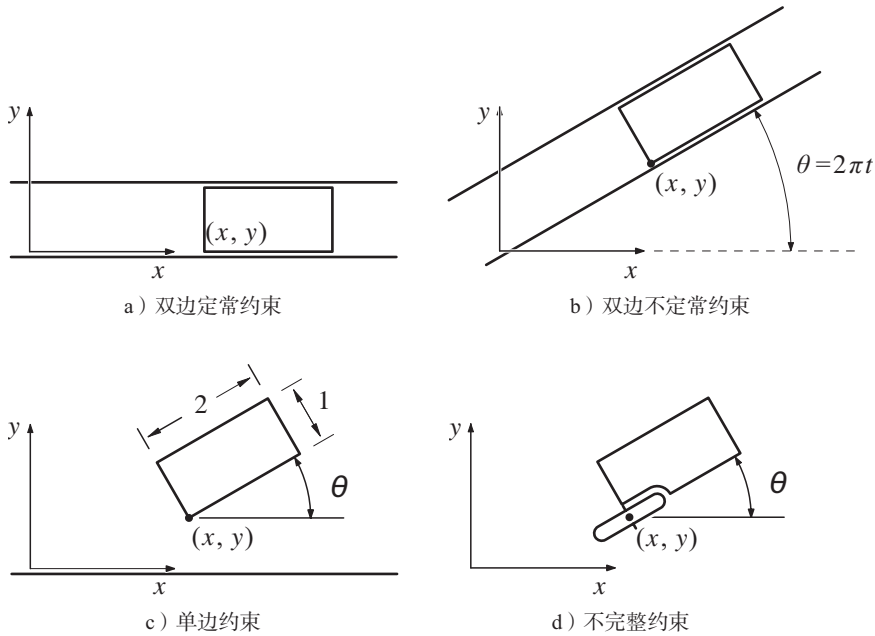


图 2-14 不同形式的运动学约束

24
25

但是该通道对矩形块施加了一个约束，该约束可由下列方程描述：

$$y=0 \tag{2.1}$$

$$\theta=0 \tag{2.2}$$

这是最简单的一种约束。约束有很多种类，并且它们都有各自的名字。

例如，假设上述矩形通道被安装在一个转盘上，同时该转盘以一转每秒的速度围绕原点旋转，如图 2-14b 所示。相应的约束方程将会是：

$$x \sin(2\pi t) - y \cos(2\pi t) = 0 \tag{2.3}$$

$$\theta = 2\pi t \tag{2.4}$$

对于一个动态约束（运动着的约束），其技术名称为非定常（rheonomic）约束。当必须要进行区分时，固定约束可被称为定常（scleronomic）约束。

另一种常见的变种是：当作用在运动上的约束不对称时，即当某运动在一个方向上受到约束，但在相反方向并不受约束。假设我们去掉图 2-14c 例子中的一侧通道壁。通

过依次审视矩形块的每个顶点，我们可以描述对应约束，写出下列不等式，使所有顶点都保持在正半平面：

$$y \geq 0 \quad (2.5)$$

$$y+2\sin\theta \geq 0 \quad (2.6)$$

$$y+2\sin\theta+\cos\theta \geq 0 \quad (2.7)$$

$$y+\cos\theta \geq 0 \quad (2.8)$$

虽然我们现在有四个约束不等式，但请注意：在任何时候其中最多只有两个约束是有效的（active），这是因为在上面的例子中最多只有两个顶点可以同时与约束表面接触。对于这种单侧约束，公认名称是单边（unilateral）约束。当必须进行区分时，双侧约束这个变种可被称为双边（bilateral）约束。

最后一种约束最有意思。假设我们去掉通道的两个侧壁，但是在方块上加入一个轮子，从而使其像独轮车或溜冰鞋那样动作，如图 2.14d 所示。在任何给定时刻，该方块可以前后运动，它也可以围绕车轮中心旋转，但不能侧向移动。我们可用下列方程来描述这一约束：

$$\dot{x}\sin\theta - \dot{y}\cos\theta = 0 \quad (2.9)$$

26

不同的是，该方程不只涉及位形变量 x 、 y 和 θ ，还涉及速度（rate）变量 \dot{x} 和 \dot{y} 。当然，我们可以对前面的任何一种情况进行微分操作，从而得到关于速度变量的方程。但是，作用在独轮车上的约束并不是这样得到的，我们不可能只用位形变量来描述该约束。正是出于这一原因，此类约束通常被称为不可积（nonintegrable）约束，或称为非完整（nonholonomic）约束。

单边约束是否是非完整约束？在我们所能找到的最古老最经典的应用力学书籍中深入搜寻之后，我对下述定义较为满意：完整（holonomic）约束应该定义为能被表述为关于位形变量及时间的公式， $F(\mathbf{q}, t) = 0$ ；而非完整约束应该定义为无法表述为上述形式的约束。非完整约束需要使用速度变量或不等式。这意味着单边约束是非完整约束。但我们要注意，与机器人相关的文献通常会忽略这一点，事实上，本书在下文中也将忽略这一点。

回想一下自由度的定义：确定系统位形所需要的独立变量的数量。那么很明显，每个独立的完整约束都会使系统减少 1 个自由度，但一个非完整约束并不会这样。这个区别非常重要，在下一小节中会有更详细地处理。

不同类型的运动学约束可归纳如下：

双边约束	双侧约束，可以表述为形如 $F(\dots) = 0$ 的公式
单边约束	单侧约束，需要使用不等式 $F(\dots) \geq 0$ 来表述

(续)

完整约束	可表述为 $F(\mathbf{q}, t) = 0$ 形式的约束, 该约束仅与位形变量或许还与时间有关, 但与速度变量无关
不完整约束	无法表述为 $F(\mathbf{q}, t) = 0$ 形式的约束, 需要使用不等式或速度变量
定常约束	一个静态约束, 形如 $F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0$, 该约束与时间无关
非定常约束	一个动态约束, $F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0$, 该约束涉及时间

2.5.1 非完整约束[⊖]

我们如何知道一个运动学约束是否为非完整约束呢? 给定一个带有速度变量的约束方程

$$F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0$$

我们如何知道同样的约束能否被写为与速率变量无关的形式?

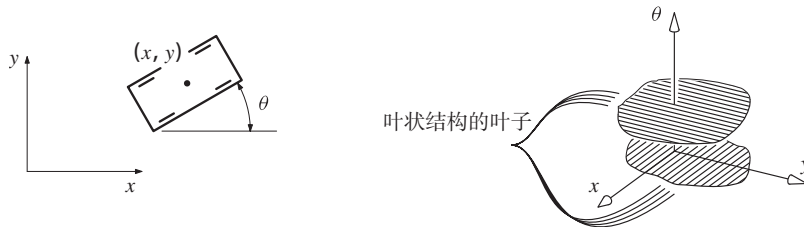


图 2-15 一个无法转弯的小车, 一旦放置就必须处于位形空间中的单个线条上。这些线组成了位形空间中的一个叶状结构

例如, 考虑图 2-15 中所示的轮式小车例子。我们可以写出两个约束方程如下:

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0 \quad (2.10)$$

$$\dot{\theta} = 0 \quad (2.11)$$

其中涉及速度变量, 因此它们看似属于非完整约束。但我们也可将上述约束写为如下形式:

$$(x - x_0) \sin \theta - (y - y_0) \cos \theta = 0 \quad (2.12)$$

$$\theta - \theta_0 = 0 \quad (2.13)$$

上述公式揭示了该问题中的约束其实属于完整约束。通过审视其位形空间, 我们可以看到这些约束属于完整约束。式 (2.12) 和式 (2.13) 将小车的位形限制到位形空间中的一条线上。实际中有多种不同的可行线, 它们分别对应于小车的不同初始位形 $(x_0, y_0,$

⊖ 我们为什么要学习非完整约束 (Nonholonomic constraints) 呢? 因为非完整约束是机器人学中非常基本的问题。机器人一般只有较少数量的电机, 其所能产生的独立运动数目最多等于电机的数目。但机器人操作任务的自由度数目要求通常较大。操作任务的自由度要求和机器人独立运动数目之间的差异意味着非完整约束。机器人运动 (locomotion) 问题中通常会存在非完整约束, 而机器人操作问题中则几乎总存在非完整约束。——译者注

θ_0)。对于特定的 θ_0 取值, 它在位形空间中所对应的 x - y 平面被角度为 θ_0 的平行线所覆盖, 如图 2-15 所示。通过不断改变 θ_0 的取值, 我们可以将整个位形空间铺满此类可行线, 其中的每条线代表退化后的单自由度位形空间。这种将位形空间划分成子空间的分解方式被称为位形空间的一个叶状结构 (foliation), 其中的每条线为叶状结构中的一个叶片 (leaf)。

独轮车将会是一种什么样的情形呢? 有没有可能生成类似的叶状结构呢? 对于独轮车来讲, 很容易构建与任意位形 (x, y, θ) 相对应的运动: 将车轮转向直至车轮指向 (x, y) 方向, 直线前进到 (x, y) , 再将车轮转向到 θ 角度。因此我们知道, 独轮车的位形空间确实是三维的, 并且该约束无法表示为一个仅与位形变量相关的等式约束形式 (即完整约束形式)。

因此, 图 2-15 中的小车例子与图 2-14d 中的独轮车例子之间存在着本质区别。小车的约束方程可以写为不使用速度变量的形式, 即这些方程是可积的 (integrable)。而另一方面, 独轮车的约束方程则是不可积的, 即, 它属于真正的非完整约束。

要判断一个系统是否为完整约束, 有时几何推理便足以胜任, 如上面的例子所示。另外, 还有一种使用李括号 (Lie bracket) 的分析方法。我们首先要介绍一些术语。令 \mathbf{C} 表示位形空间, 同时将位形写为 $\mathbf{q} \in \mathbf{C}$ 的形式。 $\mathbf{T}_q\mathbf{C}$ 为 \mathbf{q} 处的切空间 (tangent space), 它是由所有速度向量组成的空间, 可被看作是 \mathbf{R}^n 的原点被置于 \mathbf{q} 处时的拷贝。一个速度向量可被写为 $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbf{T}_q\mathbf{C}$ 。

27
28

定义 2.11: k 个 Pfaffian 约束组成的集合具有如下形式:

$$\mathbf{w}_i(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = 0, i = 1, \dots, k$$

其中, \mathbf{w}_i 是线性无关的行向量, 而 $\dot{\mathbf{q}}$ 是一个列向量。

定义 2.12: 向量场 (vector field) 是从位形 \mathbf{q} 到速度向量 $\dot{\mathbf{q}}$ 的一个光滑映射, 如下:

$$f(\mathbf{q}): \mathbf{C} \mapsto \mathbf{T}_q\mathbf{C}$$

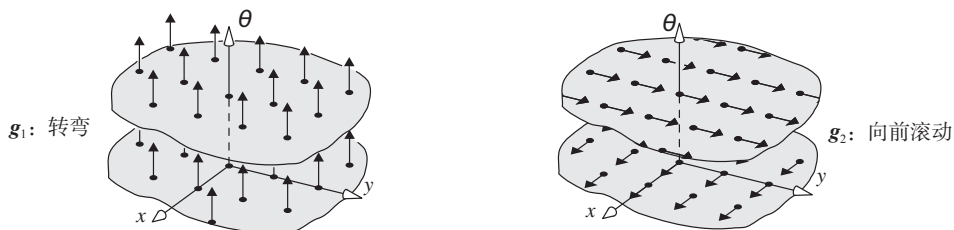


图 2-16 独轮车具有两个独立运动, 它们可由两个向量场表示

让我们来构建一些与图 2-14d 中独轮车相关的向量场例子。对于该例, 我们有

$\mathbf{q} = (x, y, \theta)^T$ 和 $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})^T$ 。对于给定的任意 \mathbf{q} ，存在两个可被视为基本运动的运动。首先，我们总能围绕车轮和地面的接触点旋转：

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

其次，我们可以使车轮沿 θ 方向滚动前进：

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

29

因此，如图 2-16 所示，我们定义两个向量场 \mathbf{g}_1 和 \mathbf{g}_2 （它们表示独轮车的两个独立运动）：

$$\mathbf{g}_1(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{g}_2(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

对于该例，单个 Pfaffian 约束可被写为：

$$\mathbf{w}_1 = (\sin \theta, -\cos \theta, 0)$$

容易验证 $\mathbf{w}_1 \mathbf{g}_1$ 和 $\mathbf{w}_1 \mathbf{g}_2$ 这两个乘积均为零，这表明对应的运动与约束方程相一致。

定义 2.13： 分布 (distribution) 是指一个光滑映射，该映射为 \mathbf{C} 中的每个位形 \mathbf{q} 分配了 $\mathbf{T}_q \mathbf{C}$ 中的一个线性子空间。

假设位形空间 \mathbf{C} 的维度为 n 。给定 k 个 Pfaffian 约束，在任何位形 \mathbf{q} 处，存在一个 $(n-k)$ 维的可行速度线性子空间。因此，回到我们关于独轮车的例子，我们可以定义如下分布：

$$\Delta = \text{span}(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$$

因此，在每个位形 \mathbf{q} 处，我们构建与两个可行运动方向相对应的速度，并使用它们作为速度基来构建由可行速度组成的一个平面。图 2-17 示出了一些此种类型的平面，它们由小圆面来表示。

定义 2.14： 如果一个分布的维度在其位形空间内保持不变，则其是规则的 (regular)。

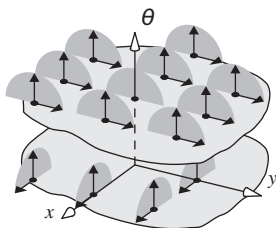


图 2-17 向量场的线性组合给出了一个分布 (distribution)，它是由所有可行运动组成的集合[⊖]

定义 2.15: 令 f 和 g 为 C 内的两个向量场。定义李括号 $[f, g]$ 为如下形式的向量场

$$\frac{\partial g}{\partial q} f - \frac{\partial f}{\partial q} g$$

李括号定义中的两个偏导数，它们是向量场相对于位形空间变化的导数，表示为 $n \times n$ 的矩阵。

定义 2.16: 如果一个分布在李括号操作下是闭合的，则它是对合的 (involutive)。

定义 2.17: 一个分布 Δ 的对合闭包 (involutive closure) 是该分布在李括号运算下的闭包 $\bar{\Delta}$ 。

定理 2.8 (Frobenius 定理): 一个规则分布是可积的，当且仅当该分布是一个对合分布。

我们放弃对 Frobenius 定理的详细证明，但其证明方法具有启发意义。为了证明一个可积分布是对合的，我们考虑进行如下动作：给定分布中的两个向量场 f 和 g ,

- 1) 在 ε 长的时间段内跟随 f 。
- 2) 在 ε 长的时间段内跟随 g 。
- 3) 在 ε 长的时间段内跟随 $-f$ 。
- 4) 在 ε 长的时间段内跟随 $-g$ 。

现在如果你将这个运动用泰勒级数展开，所有的一阶项将相互抵消，但二阶项的整合结果便是我们定义为李括号的交叉项 (cross-partial)。正是出于以上原因，这个运动通常被称为李括号运动 (Lie bracket motion)。如果分布是可积的，那么这个李括号运动也必须包含在该分布中，这意味着该分布是对合的，详情参照 (Murray 等人, 1994)。对其逆命题的证明，即对合分布是可积的，可通过在空间维度上采用数学归纳法来完成，详情

⊖ 独轮车的运动可描述为 $\dot{q} = u_1 g_1 + u_2 g_2$ ，其中 u_1 和 u_2 为任意实数，它们被称为控制输入。独轮车具有两个控制输入，但它的自由度为 3。非完整约束可使独轮车机器人采用较少的控制输入来控制较多的任务自由度。对于图 2-15 中无法转向小车与图 2-14d 中独轮车之间差异的详细讨论，读者可参照作者提供的电子教案第 5 讲。——译者注

参照 (Boothby, 1975)。

Frobenius 定理为我们提供了一种用来确定系统是否是非完整系统的简单测试方法。返回到独轮车的例子，我们有一个分布 $\Delta = \text{span}(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$ ，其中向量场 \mathbf{g}_1 和 \mathbf{g}_2 由式 (2.14) 和式 (2.15) 给出。它们的偏导数为

30
31

$$\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{q}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{q}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

对于由李括号定义的新的向量场，我们得到

$$\mathbf{g}_3 = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2] \quad (2.18)$$

$$= \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{g}_1 - \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{g}_2 \quad (2.19)$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

李括号运动 \mathbf{g}_3 是一个平行泊车 (parallel-parking, 简称平趴) 动作，它对应于独轮车的侧向运动。但 \mathbf{g}_3 将会违反独轮车的运动约束，它也肯定不在分布 $\Delta = \text{span}(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$ 中。因此我们看到 Δ 并不是对合分布，因此根据 Frobenius 定理[⊖]，独轮车是一个非完整系统[⊖]。

2.5.2 根据速度中心对平面约束进行分析

平面双边约束可以通过确定可行的速度中心来分析，就像我们构建四杆机构的瞬心极迹 (如图 2-8) 时那样。上述方法可以推广到单边约束中去，它最初的描述由 Reuleaux (勒洛，德国机械工程专家，机构运动学的创始人) 提出。Reuleaux 注意到：

- ⊖ Frobenius 定理的另一种表述：一组约束是非完整的 \Leftrightarrow 平趴运动是有用的。——译者注
- ⊖ 机器人的电机数目通常比任务自由度数目要小，因而将会存在约束。完整约束是对位形空间的约束：它告诉你无法达到的位置，这意味着自由度的减少，这通常是不好的。非完整约束是对速度的约束：它告诉你某些运动方向因受限制是不可行的，但是你还可以到达自己想去的位置，这通常是好的。平趴动作具有普遍性，如果想向被约束方向移动，可以选择一对控制输入，然后交错振荡，或者使用李括号进行数学上的推导。如果平趴无法达到目的，那么你确实被套牢在叶状结构的一个叶片上，此时需要对机器人电机进行重新布置或者增加新电机。——译者注

通过简单地在每个旋转中心附加一个符号标记，便可分析单边约束。我们将以最简单的情形作为开始：单个单边约束，如图 2-18 所示。对于处在接触法线右侧的速度极点（瞬心），只有负方向（顺时针）的旋转才是可行的。类似地，对于处于接触法线左侧的速度极点，只有正方向（逆时针）的旋转才是可行的。对于处于接触法线上的速度极点，两个方向的旋转都有可能。因此，通过在可能旋转中心的平面区域内做 +、- 或 \pm 等标记，我们可以对（单边）约束进行描述。

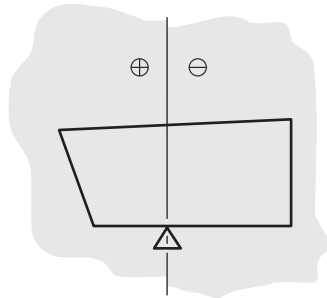


图 2-18 使用 Reuleaux 方法来分析单边约束。对于处于接触法线右侧的瞬心，只有负方向的旋转才是可行的。对于处于接触法线左侧的瞬心，只有正方向的旋转才是可行的

我们如何描述涉及多个约束的系统呢？我们只需对每个约束单独标记其区域，然后只保留标记符号始终如一的区域。如图 2-19a 所示，对于拥有两个反向平行约束的情形，唯一有可能的旋转是那些瞬心处于两个接触法线中间区域（其符号为负）的旋转。类似地，如图 2-19b 所示，对于拥有三个约束的系统，其可能的旋转中心通常为一个三角形区域，有时它会退化为一个点。

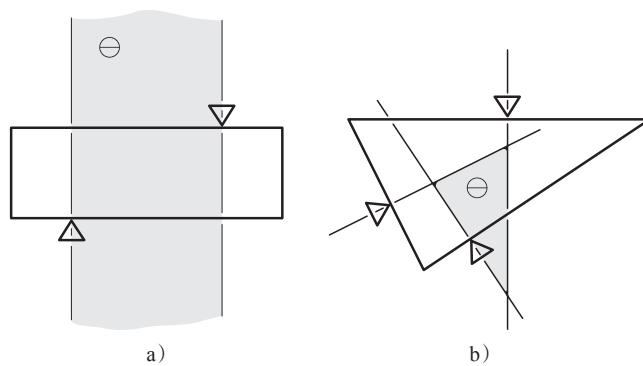


图 2-19 将 Reuleaux 方法应用到具有几个约束的情形。仅保留具有相同正负号标记的瞬心

Reuleaux 方法可以总结如下：

- 1) 对于每个接触点创建一个接触法线。
- 2) 对于每个法线，在平面内标记 +、- 或 \pm 等区域。

3) 每个标记符号始终如一的区域给出一组可能的转动极点(瞬心)。

我们需要注意上述分析方法有其局限性。正如我们在双边约束分析中所讲到的那样(如图 2-9), 这种方法是个一阶的分析方法, 有时候会给出错误答案。当一个物体无法运动时, 该方法可能会给出运动中心。例如, 如果使用 Reuleaux 方法去求解图 2-20 中的两个问题, 我们将会得到相同的分析结果, 但其中的一个(左图中的例子)实际上无法运动。尽管有其局限性, 该方法是一个简洁而有效的工具, 特别是当辅以常识知识的时候。

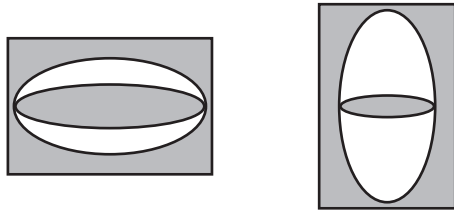


图 2-20 Reuleaux 方法是一种一阶分析方法, 有时会给出假阳象结果

2.6 运动机构

本节将对运动机构做一个简要介绍。一个运动机构(kinematic mechanism)是由通过关节(joint)相连的几个被称为连杆(link)的刚体组成的。一个关节会对与其相连的两个连杆施加一个或多个约束。如图 2-21 所示, 低副(lower pair)由几种类型的关节组成, 这些关节可由具有正接触面积(接触面积大于零)的两个表面构建而成。因此, 当一个圆柱轴处于一个与其相匹配的圆柱孔内时, 便形成了一个低副, 即圆柱副(cylindrical pair); 但当圆柱处于平面上两者为线接触时(此时两者接触面积为零), 形成了一个高副(higher pair)。

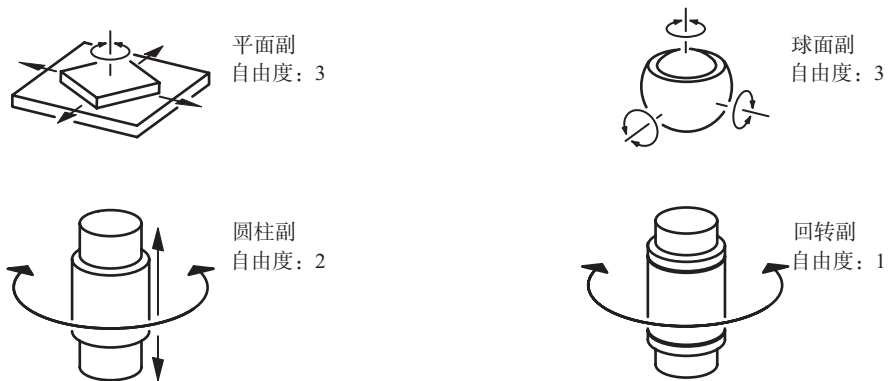


图 2-21 运动低副



图 2-21 (续)

关于运动机构的研究将要解决如下问题：对于给定的一个连杆机构，确定该机构的可能运动，以及设计一个能够产生期望运动的连杆机构。我们已经见过一些例子（如图 2-7 和图 2-8）。习题 2.5 到习题 2.7 给出了另外一些有意思的连杆机构。

主要问题之一便是确定一个机构的可动度（mobility）。可动度的定义为：当一个连杆固定时，整个连杆机构的自由度数目。为此，我们将使用连通度（connectivity）这一概念，其定义为：某个特定连杆相对于另一连杆的自由度数目。因此，图 2-22 中机构的可动度为 2（ $M=2$ ），而二号连杆（L2）相对于一号连杆（L1）的连通度为 1（ $C_{21}=1$ ）。

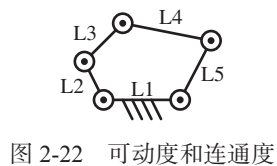


图 2-22 可动度和连通度

有一个简便公式可确定连杆机构的可动度。令 n 表示连杆的数量， g 表示关节的数量。对于第 i 个关节，令 u_i 表示约束的数量， f_i 表示自由度数目，注意到 $u_i+f_i=6$ 。如果

[34] 我们将一个连杆看作是固定的，并假设所有约束是相互独立的，那么该机构的可动度 M 即为：

$$M = 6(n-1) - \sum u_i \quad (2.21)$$

$$= 6(n-1) - \sum (6 - f_i) \quad (2.22)$$

$$= 6(n-g-1) + \sum f_i \quad (2.23)$$

[35] 这被称为是空间连杆机构的 Grübler 公式。类似地，对于平面连杆机构，我们有如下公式：

$$M = 3(n-1) - \sum u_i \quad (2.24)$$

$$= 3(n-g-1) + \sum f_i \quad (2.25)$$

当我们将 Grübler 公式的空间变体应用到平面机构上时，通常会得到错误的答案。这是由于在三维空间中，平面连杆机构的关约束之间存在着某些依赖关系。

Grübler 公式的另一种变体可被用于带有环路（loop）的机构中。首先注意到对于一个单环运动链而言，其连杆数目等于关节数目（ $n=g$ ），因此有：

$$M = \sum f_i + 6(-1)$$

现在，我们如果加入一个带有 k 个连杆以及 $k+1$ 个关节组成的开式运动链，从而建立一个双环机构，我们将有：

$$M = \sum f_i + 6(-2)$$

每当我们加入一个开式运动链，关节超过连杆的数目便会增加 1。因此，对于包含 l 个环路的运动链而言，如果它属于空间连杆机构，我们有：

$$M = \sum f_i - 6l$$

如果它属于平面连杆机构，我们有：

$$M = \sum f_i - 3l$$

例如，对于一个四杆机构，我们有四个关节，每个关节有一个自由度，并且该机构中有一个回路，因此 $M=1$ 。

最后一个注意事项：因为 Grübler 公式建立在“约束之间相互独立”这一非常强的假设之上，在使用该公式的时候需要配套大量的常识知识。

2.7 文献注释

对本章内容而言，(Reuleaux, 1876) 和 (Hilbert 和 Cohn-Vossen, 1952) 是必不可少的读物。本书中许多关于运动连杆的资料以及一些历史背景都出自 (Hartenberg 和 Denavit, 1964)。文献 (Bottema 和 Roth, 1979) 和 (McCarthy, 1990) 中对理论运动学有更为详细的处理。特别是，读者可以参考他们对欧拉定理以及平面转动极点的分析证明。文献 (Lin 和 Burdick, 2000) 解决了特殊欧式群的度量问题。对非完整约束的分析，其资料改编自 (Murray 等人, 1994)，对于与之相关的主题内容，也可以参考 (Brockett, 1990)。本书中的运动约束导论改编自 (Paul, 1979)。对于旋量理论及其在机构学中的应用，文献 (Ball, 1900) 和 (Hunt, 1978) 中有更为详细的推导。对于运动学约束的更高阶分析则由 (Rimon 和 Burdick, 1995) 给出。

[36]

习题

2.1: 人们通常说 \mathbf{E}^3 中的一条线有 4 个自由度，因为需要使用 4 个数字来指定一条线。然而，对定义 2.2 和定义 2.4 进行仔细解读则表明： \mathbf{E}^3 中的一条线有 5 个自由度。试证明 \mathbf{E}^3 中的一条线可以通过 4 个数字得到确定。同时根据我们的定义，解释为什么该条线有 5 个自由度。

2.2: 图 2-4 给出了一个例子, 它表明一般情况下空间旋转并不满足交换律。请举例说明, 一般情况下平面位移不满足交换律。

2.3: 图 2-23 展示出了一个平面移动机器人, 它可以周期性地依次通过 A 、 B 、 C 这三个位置。机器人规划由三个旋转组成的序列, 使得它可以周期性地依次通过这三个期望位置。建立这个周期性运动中的固定和移动瞬心极迹。

机器人发现自己无法执行规划方案。这是由什么困难造成的呢?

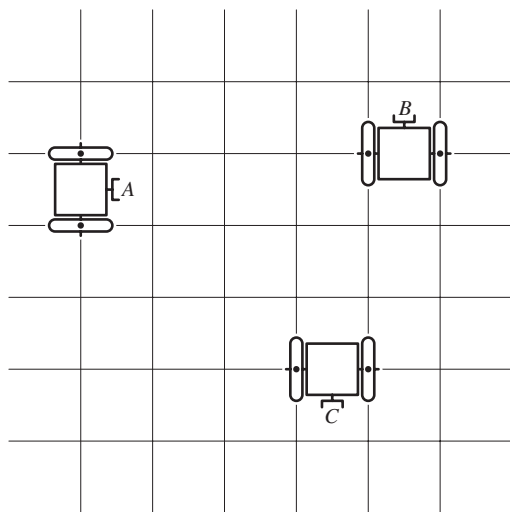


图 2-23 习题 2.3 的构造

2.4: 你的新冰箱已交付使用, 你需要将它从厨房中心搬到角落里去, 参照图 2-24。你可以依照“行走”(walk)的方式去移动冰箱, 具体操作方式如下: 将冰箱的重量向一只脚转移, 然后推动冰箱使其围绕该负重中心脚旋转。求解一条短的旋转序列, 使得冰箱可以按照行走方式被搬到角落中去, 并建立对应的瞬心极迹。不要穿过任何墙壁(提示: 反向求解装配问题通常会比较容易, 因此求解一条从目标到起始点的路径)。

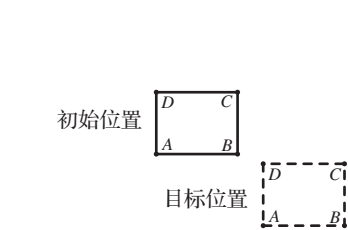


图 2-24 习题 2.4 的构造

2.5: 图 2-25 展示出了一个名为曲柄滑块 (slider-crank) 的简单平面机构。当曲柄做 360° 旋转时, 滑块会做往复运动。仔细画出该机构的一些位形, 并且对于每种位形构建耦合连杆的中心点的瞬心。画出相应的瞬心极迹。通过对曲柄转角每隔 30° 进行采样, 你将需要构造至少 12 种不同的位形。为了构建运

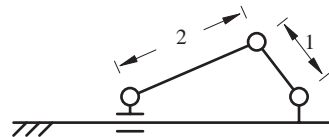


图 2-25 习题 2.5 中的曲柄滑块机构

动瞬心极迹，你可能需要使用透明的醋酸纤维纸或描图纸。

2.6: 图 2-26 中展示出了一个名为切比雪夫连杆机构 (Chebyshev linkage) 的四连杆机构。其中的两个连杆来回摇摆, 使得耦合连杆做更复杂的运动。耦合连杆中心点轨迹路径中的一部分可近似为一条直线。采用习题 2.5 中的步骤来构建对应的固定瞬心极迹和运动瞬心极迹。

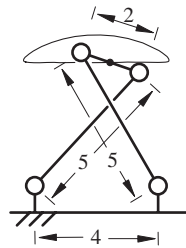


图 2-26 习题 2.6 中的切比雪夫连杆机构

2.7: 图 2-27 展示出了一个名为瓦特连杆机构 (Watt's linkage) 的简单平面机构。与前面的习题类似, 耦合连杆中心点轨迹路径中的一部分可近似为一条直线。采用习题 2.5 中的步骤来构建对应的固定瞬心极迹和移动瞬心极迹。

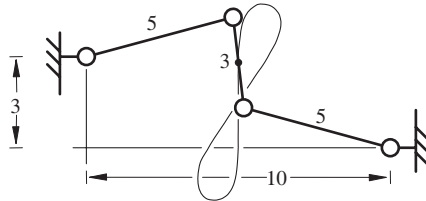


图 2-27 习题 2.7 中的瓦特连杆机构

2.8: 应用 Reuleaux 方法来求解图 2-28 中的问题, 确定被约束刚体的所有可能运动。

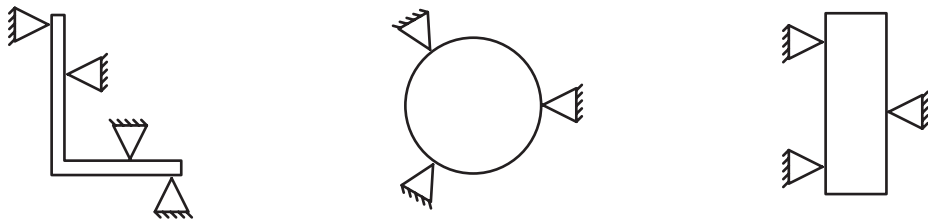


图 2-28 习题 2.8 中的三个单边约束问题

2.9: 假设我们已经在三角形物体上放置了三根手指, 如图 2-19b 所示。在拿起三角形物体之前, 我们希望该物体相对于手指固定。求解如何放置第四根手指, 从而能够使该三角形物体固定。使用 Reuleaux 方法来证明你的布置方案确实可行, 假设手指是完全刚性的。

2.10: 使用 Frobenius 定理来证明平面中的一个刚体, 如果有两个独立 Pfaffian 约束作用其上, 那么这些约束必为完整约束。