

第3章 |

Mechanics of Robotic Manipulation

运动学表示

本章介绍空间旋转和空间位移的表示。这些表示是满足计算目的所必需的，但更重要的是，它们丰富了我们的直觉，并让我们可以洞察空间运动的性质。

3.1 空间旋转的表示

有多种不同的方案可用来表示旋转，但究其本质而言，这些方法中只有极少数是与众不同的。本节将介绍一些基本概念，同时还介绍这些概念在不同的表示方法中是如何体现的。

在表示旋转的时候有两个大问题，这两大问题都关系到旋转所固有的、无可争议的性质：

- 旋转不满足交换律（见图 2-4）。
- 空间旋转的拓扑结构在三维欧氏空间中没有一个光滑嵌入（smooth embedding）。

第一个问题，旋转的不可交换性，这是众所周知的，在很多基础物理书籍中都会有相关讨论。即便如此，在头脑中认真理清这一事实相当重要，这是因为某些表示方法看起来似乎与这一事实相矛盾（习题 3.8）。第二个问题，三维欧氏空间内光滑嵌入的缺失，这意味着并不存在一个只用三个数字的光滑表示。这个问题类似于在地球表面上为各个地点分配坐标。我们所使用的经度和纬度表示方法在地球的两极处会变得十分别扭，此时随便踏出一步便会引起经度值的彻底改变。我们并不期待寻找一个更为优秀的表示系统，这是因为不存在这样的系统——不可能用一个平面去光滑地包裹一个球面。类似地，不可能用三维欧氏空间去光滑地包裹旋转空间 $SO(3)$ [⊖]。

因此在设计旋转的表示方法时，我们需要做出如下选择：只用 3 个数字，但同时忍受由此而引起的奇点问题；或者使用 4 个（或更多个）数字，同时忍受冗余。这种选择取决于随具体应用而变化的多种因素。对于计算机来讲，存在冗余并不是问题，所以大多数算法使用带有冗余数字的表示方法。而另一方面，人们有时则偏好于使用最少量的数字集合。正是由于这些原因以及其他差异，所以并不存在某个更为优秀的表示方法。

⊖ $SO(3)$ 的拓扑结构为 P^3 ，其中 P^3 为通过 R^4 空间原点的所有直线组成的集合。可以证明不存在一个 $P^3 \rightarrow R^4$ 的光滑映射。因而，在三维欧氏空间中不存在“好”的三参数表示方法。——译者注

因此通常必须保持使用几种不同的表示方法，我们还可以使用相关程序在不同的表示方法之间进行转换。

41

3.1.1 轴线 – 角度

欧拉定理（定理 2.6）指出：在任何空间旋转中都会有某些直线保持固定，它们被称为旋转轴线（转轴）。让我们将原点固定在转轴上的某个位置，并令 \hat{n} 表示沿转轴方向的单位向量。令 θ 表示旋转的幅值大小，同时将相对于 \hat{n} 的右手方向作为旋转的正方向，如图 3-1 所示。那么，有序数对 (\hat{n}, θ) 可以指代一个旋转，我们将其标记为 $\text{rot}(\hat{n}, \theta)$ 。注意到对于大多数旋转而言，这个表示是二对一的映射，即 $\text{rot}(-\hat{n}, -\theta)$ 将给出与 $\text{rot}(\hat{n}, \theta)$ 相同的旋转结果。冗余的另一个额外来源是：对于任意整数 k ， $\text{rot}(\hat{n}, \theta + 2k\pi)$ 与 $\text{rot}(\hat{n}, \theta)$ 相同。通过将 θ 限制在某个合适的范围内，例如 $[0, \pi]$ ，可以在一定程度上改善上述两个冗余问题。不过更麻烦的难题在于：当 $\theta=0$ 时，旋转轴是不确定的，此时该种表示方法将给出无穷对一的映射。

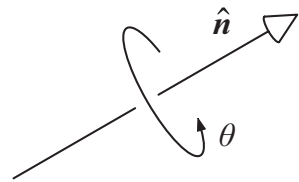


图 3-1 使用轴线 – 角度方法来表示空间旋转

对于旋转的表示，我们有三件事情可做。第一，我们可以用它进行交流或者记录旋转；第二，我们可以用它来旋转物体，例如记录一个点经过旋转之后的表示；第三，给定两个旋转，我们可能想要表示它们的叠加结果。不过，对于计算叠加而言，轴线 – 角度（也称轴 – 角）表示方法是一个不好的选择。

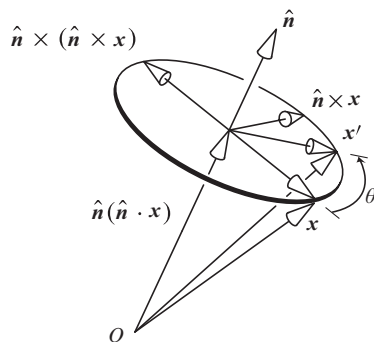


图 3-2 罗德里格斯公式的几何推导

要旋转一个点，我们将使用罗德里格斯公式（Rodrigues's formula），如图 3-2 所示。假定用向量 x 来表示被旋转的点。首先，我们将 x 分解为分别与转轴 \hat{n} 平行和垂直的两部分： $x = x_{\parallel} + x_{\perp}$ 。我们可将 x_{\parallel} 重写为 $\hat{n}(\hat{n} \cdot x)$ ，并将 x_{\perp} 重写为 $-\hat{n} \times (\hat{n} \times x)$ ，于是我们得到：

$$x = \hat{n}(\hat{n} \cdot x) - \hat{n} \times (\hat{n} \times x) \quad (3.1)$$

平行分量并不受旋转的影响。当旋转垂直分量时，我们得到：

$$\mathbf{x}' = \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}) + \sin \theta (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{x}) - \cos \theta \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{x}) \quad (3.2)$$

上式便是罗德里格斯公式。它的一个常用变体为：

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + (\sin \theta) \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{x} + (1 - \cos \theta) \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{x}) \quad (3.3)$$

罗德里格斯公式的应用远远超出对点的旋转。例如，后续部分中我们将使用罗德里格斯公式来推导从一种表示方法到另一种表示方法的变换。

3.1.2 旋转矩阵

出于很多方面的原因，旋转矩阵 (rotation matrix) 是空间旋转中最有用的一种表示方式，这是因为对一个点的旋转操作以及对两个旋转的叠加运算，都可以使用矩阵乘法来实现。下面，我们以旋转矩阵的推导作为开始。

令原点处于旋转轴线之上，并令 $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2, \hat{\mathbf{u}}_3)$ 描述一个右手坐标系；即， $\hat{\mathbf{u}}_i$ 将是相互正交的单位向量，其中 $\hat{\mathbf{u}}_1 \times \hat{\mathbf{u}}_2 = \hat{\mathbf{u}}_3$ 。令 $(\hat{\mathbf{u}}'_1, \hat{\mathbf{u}}'_2, \hat{\mathbf{u}}'_3)$ 表示旋转之后的象。旋转可根据 $\hat{\mathbf{u}}_i$ 的运动而得到完全确定。我们将 $\hat{\mathbf{u}}'_i$ 表达在 $\hat{\mathbf{u}}_i$ 坐标里，并将它们整理为矩阵形式如下：

$$\hat{\mathbf{u}}'_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \hat{\mathbf{u}}'_1 \\ \hat{\mathbf{u}}_2 \cdot \hat{\mathbf{u}}'_1 \\ \hat{\mathbf{u}}_3 \cdot \hat{\mathbf{u}}'_1 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

$$\hat{\mathbf{u}}'_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \hat{\mathbf{u}}'_2 \\ \hat{\mathbf{u}}_2 \cdot \hat{\mathbf{u}}'_2 \\ \hat{\mathbf{u}}_3 \cdot \hat{\mathbf{u}}'_2 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$$\hat{\mathbf{u}}'_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \hat{\mathbf{u}}'_3 \\ \hat{\mathbf{u}}_2 \cdot \hat{\mathbf{u}}'_3 \\ \hat{\mathbf{u}}_3 \cdot \hat{\mathbf{u}}'_3 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

$$A = (a_{ij}) = (\hat{\mathbf{u}}'_1 | \hat{\mathbf{u}}'_2 | \hat{\mathbf{u}}'_3)$$

因为一个旋转矩阵有 9 个数字，而空间旋转仅有 3 个自由度，所以我们将会有 6 个冗余数字，实际上在旋转矩阵的这 9 个数字中存在着 6 个约束：

$$|\hat{\mathbf{u}}'_1| = |\hat{\mathbf{u}}'_2| = |\hat{\mathbf{u}}'_3| = 1 \quad (3.7)$$

$$\hat{\mathbf{u}}'_3 = \hat{\mathbf{u}}'_1 \times \hat{\mathbf{u}}'_2 \quad (3.8)$$

上述公式只是重申这些向量是组成右手坐标系的单位向量。满足这些性质的矩阵被称为是正交的 (orthonormal)。当用于表示旋转时，它们被简单地称为旋转矩阵。

1. 使用旋转矩阵来转动一点

如果我们在坐标系 $(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3)$ 中使用点 x 的坐标 (x_1, x_2, x_3) 来表示该点, 那么旋转后的对应点 x' 在 $(\hat{u}'_1, \hat{u}'_2, \hat{u}'_3)$ 坐标系中则由同一坐标给出:

$$\mathbf{x}' = x_1 \hat{u}'_1 + x_2 \hat{u}'_2 + x_3 \hat{u}'_3 \quad (3.9)$$

$$= x_1 A \hat{u}_1 + x_2 A \hat{u}_2 + x_3 A \hat{u}_3 \quad (3.10)$$

$$= A(x_1 \hat{u}_1 + x_2 \hat{u}_2 + x_3 \hat{u}_3) \quad (3.11)$$

$$= A\mathbf{x} \quad (3.12)$$

因此, 点的转动可以通过常用的矩阵乘法来实现。

2. 使用旋转矩阵进行坐标变换

使用旋转矩阵对一个点进行转动操作, 这与坐标变换问题是密切相关的。假设我们有 A 和 B 两个不同的坐标系, 我们将使用机构学及机器人文献中常见的符号来表示坐标系, 使用左上角标来指代向量或矩阵所在的坐标系。因此:

x 一个点

\mathbf{x} 从原点 O 指向点 x 的一个几何向量, 或者由三个数字组成的一个向量, 这些数字表示点 x 在一个未具体指定的坐标系中的坐标

${}^A\mathbf{x}$ 由三个数字组成的一个向量, 这些数字表示点 x 在参考系 A 中的坐标

令 ${}^A\mathbf{x}$ 表示某 x 点在参考系 A 中的坐标, 令 ${}^B\mathbf{x}$ 表示同一点在参考系 B 中的坐标, 令 ${}^B_A\mathbf{R}$ 表示将坐标系 B 转动到坐标系 A 的旋转矩阵。那么我们已经看到 ${}^B_A\mathbf{R}$ 表示点 x 的旋转:

$${}^B\mathbf{x}' = {}^B_A\mathbf{R}{}^A\mathbf{x} \quad (3.13) \quad \boxed{44}$$

这里, 我们可以将旋转矩阵的左上角标看作是用来指示矩阵的坐标系。这种操作只能应用于当矩阵和列向量表示在同一坐标系中时, 即它们具有相同的左上角标。

然而, 使用相同的矩阵乘法, 我们也可以表示坐标变换:

$${}^B\mathbf{x} = {}^B_A\mathbf{R}{}^A\mathbf{x} \quad (3.14)$$

这里, 向量的左上角标需要与矩阵的左下角标相匹配。直观上讲, 通过相乘使得这些角标“相互抵消”, 只剩下左上角标 B 。

3. 使用旋转矩阵表示旋转的叠加

令旋转矩阵 \mathbf{R}_1 和 \mathbf{R}_2 表示两个依次进行的旋转。令 p 表示某个点, p' 表示第一次旋

转之后的象, p'' 表示第二次旋转之后的象。这里, 矩阵和列向量相对于同一个未指定的坐标系进行表示。根据矩阵乘法的分配律, 我们有:

$$p' = R_1 p \quad (3.15)$$

$$p'' = R_2(p') \quad (3.16)$$

$$= R_2(R_1 p) \quad (3.17)$$

$$= (R_2 R_1) p \quad (3.18)$$

因此, 两个旋转的叠加可由两个旋转矩阵的乘积来表示。

4. 旋转矩阵的其他性质

旋转矩阵通常是我们首选的表示方法, 这是因为它有如下性质可用来简化计算:

- 零旋转由单位矩阵表示:

$$\text{rot}(\hat{n}, 0) \mapsto I \quad (3.19)$$

- 旋转的逆由矩阵转置给出:

$$\text{rot}(\hat{n}, -\theta) \mapsto R^{-1} = R^T \quad (3.20)$$

- 旋转矩阵的坐标变换:

$${}^A R = {}^A R^B R_A^B R \quad (3.21)$$

45 其中 ${}^A R$ 和 ${}^B R$ 为旋转矩阵, ${}^A R$ 和 ${}^B R$ 是坐标变换矩阵[⊖]。

5. 轴线 – 角度到矩阵表示的变换

假设我们使用轴线 – 角度方法来表示一个旋转, 我们需要对应的旋转矩阵。罗德里格斯公式为该问题提供了一个简单的解决方法, 此时若使用其他方法则会非常繁琐。罗德里格斯计算公式为:

$$x' = x + (\sin \theta) \hat{n} \times x + (1 - \cos \theta) \hat{n} \times (\hat{n} \times x)$$

在这些情况下, 一个有用的技巧是将向量叉积重写为矩阵操作。定义 N :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

使得

$$Nx = \hat{n} \times x \quad (3.23)$$

代入到罗德里格斯公式:

⊖ 旋转矩阵实例, 参见原书作者电子教案第七讲。——译者注

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + (\sin \theta)N\mathbf{x} + (1 - \cos \theta)N^2(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{x}) \quad (3.24)$$

将方程右侧关于 \mathbf{x} 的系数整理在一起，便得到一个关于旋转矩阵的表达式：

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + (\sin \theta)N + (1 - \cos \theta)N^2 \quad (3.25)$$

将旋转矩阵展开，得到：

$$\begin{pmatrix} n_1^2 + (1 - n_1^2)c\theta & n_1n_2(1 - c\theta) - n_3s\theta & n_1n_3(1 - c\theta) + n_2s\theta \\ n_1n_2(1 - c\theta) + n_3s\theta & n_2^2 + (1 - n_2^2)c\theta & n_2n_3(1 - c\theta) - n_1s\theta \\ n_1n_3(1 - c\theta) - n_2s\theta & n_2n_3(1 - c\theta) + n_1s\theta & n_3^2 + (1 - n_3^2)c\theta \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

其中 $c\theta = \cos\theta$, $s\theta = \sin\theta$ 。

6. 将矩阵转换为轴 - 角表示

给定某个旋转矩阵 \mathbf{R} ，我们需要求解其所对应的轴 - 角表示 $\text{rot}(\hat{\mathbf{n}}, \theta)$ 。首先，我们应该注意到，当 $\theta=0$ 时，转轴是不确定的。所以当 \mathbf{R} 为单位矩阵时，我们不应该指望去计算 $\hat{\mathbf{n}}$ 。此外，我们必须能甘心于接受下列事实：当 \mathbf{R} 接近单位矩阵时，变换方法将会是病态的。该问题的本质在于：当 \mathbf{R} 接近单位矩阵时， \mathbf{R} 的微小变换将会引起 $\hat{\mathbf{n}}$ 的显著变化。

另一方面，当 $\theta = 180^\circ$ 时，则不存在此类困难。而其他一些广为人知的方法在此情况下将会失效，所以要小心。一个简单方法是将矩阵转换为四元数，然后再将四元数转换为轴 - 角形式。对于其中的每种变换，3.1 节中会给出具有良好效果的方法。

46

7. 微分旋转

对于一个微分旋转 $\text{rot}(\hat{\mathbf{n}}, d\theta)$ ，考虑罗德里格斯公式：

$$\mathbf{x}' = (\mathbf{I} + \sin d\theta N + (1 - \cos d\theta)N^2)\mathbf{x} \quad (3.27)$$

$$= (\mathbf{I} + d\theta N)\mathbf{x} \quad (3.28)$$

因而

$$d\mathbf{x} = N\mathbf{x}d\theta \quad (3.29)$$

$$= \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{x}d\theta \quad (3.30)$$

这给出了一个在微分旋转中使用叉积的简单理由。如果我们定义角速度向量 $\boldsymbol{\omega}$ 如下：

$$\boldsymbol{\omega} = \hat{\mathbf{n}} \frac{d\theta}{dt} \quad (3.31)$$

那么，我们可得到：

$$d\mathbf{x} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}dt \quad (3.32)$$

容易推出微分旋转是向量：你可以对它们进行缩放，然后把它们加起来。

8. 矩阵表示方法总结

出于多方面的原因，旋转矩阵是一种方便的表示方式。旋转矩阵和空间旋转之间的映射是一对一的，且不存在奇点。旋转一个向量十分简单，多个旋转的叠加与求逆操作也都很简单。该方法的另外一个特点是矩阵代数为人们所熟悉。该方法的主要缺点是它涉及到很多数字，这往往让人觉得旋转矩阵比较难以理解。此外，旋转矩阵还可能积累数值误差，因而需要使用奇异值分解或其他技术把旋转矩阵单位化。

3.1.3 欧拉角

空间旋转可以用3个数字来表示，这些数字分别对应了围绕从某坐标系中选出的轴线连续进行的3个旋转时所转过的角度。该方法有几种不同的使用惯例，它们随转轴的选择而变化，同时也受这些连续旋转是围绕变换后的（transformed）轴线或是围绕原始的固定（fixed）轴线这些因素的影响而变化[⊖]。本节中采用 ZYZ 惯例，即，欧拉角 (α, β, γ) 可解释为围绕 z 轴转过 α 角度，然后围绕变换后的 y' 轴转过 β 角度，最后围绕经过两次变换后的 z'' 轴转过 γ 角度，如图 3-3 所示：

47

$$(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto \text{rot}(\gamma, \hat{z}'')\text{rot}(\beta, \hat{y}')\text{rot}(\alpha, \hat{z}) \quad (3.33)$$

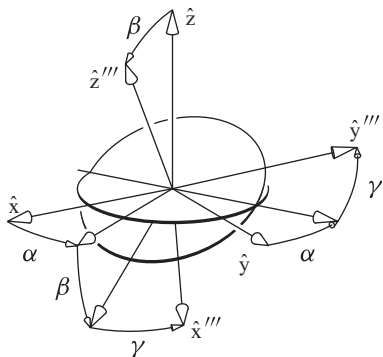


图 3-3 使用欧拉角来表示空间旋转

任何空间旋转都可用 ZYZ 欧拉角来表示。假设给定某坐标系 $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ ，以及它在期望旋转作用下的象 $(\hat{x}'', \hat{y}'', \hat{z}'')$ 。我们可以表述欧拉角如下：

围绕 \hat{z} 轴旋转 α 角度直至 $\hat{y}' \perp \hat{z}''$ ；

围绕 \hat{y}' 轴旋转 β 角度直至 $\hat{z}'' \parallel \hat{z}'''$ ；

围绕 \hat{z}'' 轴旋转 γ 角度直至 $\hat{y}'' = \hat{y}'''$ 。

⊖ 我们常将变换后的坐标系称为“当前坐标系”，而将固定坐标系称为“世界坐标系”。——译者注

需要注意上述程序并不能完全确定 α 、 β 以及 γ 这些参数。在一般情况下, $\sin\beta \neq 0$, 此时存在两种选项, 这是因为 $(\alpha + \pi, -\beta, \gamma + \pi)$ 与 (α, β, γ) 将会给出相同的结果。当 $\sin\beta=0$ 时, 会出现两种特殊情况。如果 $\hat{z} = \hat{z}''$, 那么 $\beta=0$, 此时可以自由选择 α 的取值——此时只有 α 与 γ 两者之和才有关系。如果 $\hat{z} = -\hat{z}''$, 那么 $\beta = \pi$, 再次出现 α 的取值可以自由选择的情况——此时只有 α 与 γ 两者之差才最为重要。所以从欧拉角到空间旋转的映射通常是二对一的关系, 除去两个特殊情况。特殊情况下映射是一个连续体 (continuum) 对一的关系。

对点的旋转和构建复合旋转来讲, 欧拉角都不是一个方便的表示方法。通常更为明智的做法是变换到旋转矩阵或者其他更适合于计算用途的表示方法。

48

1. 欧拉角到旋转矩阵的变换

使用下列公式, ZYZ 欧拉角可被映射到一个空间旋转:

$$\text{rot}(\gamma, \hat{z}'')\text{rot}(\beta, \hat{y}')\text{rot}(\alpha, \hat{z}) \quad (3.34)$$

幸运的是, 我们可以改变操作顺序, 并围绕固定转轴进行旋转 (参照习题 3.3):

$$\text{rot}(\alpha, \hat{z})\text{rot}(\beta, \hat{y}')\text{rot}(\gamma, \hat{z}) \quad (3.35)$$

通过使用旋转矩阵来替代上式中的每个因子, 然后将乘积展开, 我们可以得到等效的旋转矩阵。在下面的公式中, 我们采用了 $c\alpha = \cos\alpha$ 、 $s\alpha = \sin\alpha$ 等简写符号:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha c\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta \\ s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta \\ -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma & c\beta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.36)$$

沿另一方向的变换, 即从一个旋转矩阵到一组欧拉角的变换, 并非如此简单。假设给定某矩阵:

$$(r_{ij}) = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

我们设置 (r_{ij}) 等于式 (3.36) 中的矩阵, 求解 α 、 β 以及 γ 这些参数并将它们表示为关于 r_{ij} 的函数形式。其中两个参数的求解较为简单: α 等于 $\tan^{-1}(r_{23}, r_{13})$, γ 等于 $\tan^{-1}(r_{32}, -r_{31})$; 这里, 我们假设 \tan^{-1} 是一个双参数的反正切函数, 它将一个点的坐标 (y, x) 映射到对应角度。但是, 这种方法无法解决 $\sin\beta=0$ 这种特殊情况。我们似乎应该对这些特殊情况进行单独处理, 但我们将使用一种更为优雅的方法, 它对所有情况一视同仁。但

是该方法需要使用一个不会在 $\tan^{-1}(0,0)$ 处产生错误的反正切计算程序。

其主要策略是使用 α 和 γ 这两个参数的和与差。令 σ 表示两者之和， δ 表示两者之差：

$$\sigma = \alpha + \gamma \quad (3.38)$$

$$\delta = \alpha - \gamma \quad (3.39)$$

49 那么，

$$\alpha = (\sigma + \delta)/2 \quad (3.40)$$

$$\gamma = (\sigma - \delta)/2 \quad (3.41)$$

现在，将注意力转移到矩阵 (3.36)，我们观察到：

$$r_{22} + r_{11} = \cos\sigma (1 + \cos\beta) \quad (3.42)$$

$$r_{22} - r_{11} = \cos\delta (1 - \cos\beta) \quad (3.43)$$

$$r_{21} + r_{12} = \sin\delta (1 - \cos\beta) \quad (3.44)$$

$$r_{21} - r_{12} = \sin\sigma (1 + \cos\beta) \quad (3.45)$$

求解 σ 和 δ ，我们得到

$$\sigma = \tan^{-1}(r_{21} - r_{12}, r_{22} + r_{11}) \quad (3.46)$$

$$\delta = \tan^{-1}(r_{21} + r_{12}, r_{22} - r_{11}) \quad (3.47)$$

$\sin\beta=0$ 这种情况似乎仍是一个问题，但实际上，上述方法已完美地解决了这个问题。在 $\beta=0$ 处，我们得到 σ 的一个解，但 δ 是不确定的。在 $\beta=\pi$ 处，我们应该得到 δ 的一个解，但 σ 是不确定的。这正是该解决方案的行为特性。不确定参数的取值将默认取为 $\tan^{-1}(0,0)$ 的任何返回值，通常为 0。在远离奇点处， σ 和 δ 可被唯一确定。给定 σ 和 δ ，我们使用式 (3.40) 和式 (3.41) 来求解 α 和 γ 。为了求解 β ，我们使用 α 的解来计算 $\cos\alpha$ 和 $\sin\alpha$ ，然后使用

$$\beta = \tan^{-1}(r_{13}\cos\alpha + r_{23}\sin\alpha, r_{33}) \quad (3.48)$$

2. 欧拉角表示方法总结

欧拉角的方便之处主要在于它们只使用 3 个数字，这种表示方法不存在冗余。欧拉角提供了一种能够使空间旋转可视化的好方法。此外，它们常被用在旋转物体的动力学分析中。但是出于很多方面的原因，人们通常优先选择其他方法。

3.1.4 四元数

四元数是由实数组成的一个四元组，它满足我们在下文中将要定义的加法和乘法操

作规则。四元数最初是作为复数的推广，由 Hamilton（汉密尔顿，数学家）引入的。正如复数使我们能够做二维向量的乘除运算，四元数使我们能够做四维向量的乘除运算。并且，正如平面旋转可通过复数乘积来实现，四维空间的旋转可以通过四元数的乘积来实现。通过使用一个简单的技巧，我们也可以四元数来旋转三维空间。 [50]

除去本身构造优雅这一事实之外，四元数在旋转的表示方面是非常有用的。四元数中的元素也被称为有限旋转的欧拉参数（Euler parameter），它不应与欧拉角相混淆。（如果这些都不足以令人困惑，Cheng 和 Gupta（1989）指出欧拉本人实际上是第一个推导出罗德里格斯公式的人，而罗德里格斯本人则是第一个推导出欧拉参数的。最扭曲的是：如 Altmann（1989）文中所讲，高斯已经发明了四元数，但从未费心去发布。）

定义 3.1：实四元数（real quaternion）是一个四元组 (q_0, q_1, q_2, q_3) ，有时它被写为包含四个基本元素的形式如下：

$$q = q_0 1 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \quad (3.49)$$

其中，所有的 q_i 均为实数。我们定义如下运算：

1) 两个四元数之和（sum）类似于向量之和：

$$p + q = (p_0 + q_0)1 + (p_1 + q_1)i + (p_2 + q_2)j + (p_3 + q_3)k \quad (3.50)$$

2) 一个标量与一个四元数的乘积（product）由下式给出：

$$wq = (wq_0)1 + (wq_1)i + (wq_2)j + (wq_3)k, w \in \mathbf{R} \quad (3.51)$$

3) 四元数之间的乘积（product）通过规定乘法相对于加法的分配律，并通过指定下列基本元素的乘积而定义：

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad (3.52)$$

$$ij = k \quad (3.53)$$

$$jk = i \quad (3.54)$$

$$ki = j \quad (3.55)$$

4) 四元数的共轭（conjugate）类似于复数共轭：

$$q^* = q_0 1 - q_1 i - q_2 j - q_3 k \quad (3.56)$$

5) 四元数的长度（length）定义为：

$$|q| = \sqrt{qq^*} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \quad (3.57)$$

容易证明上述定义中的加法和乘法都有正确属性——加法服从结合律和交换律，而乘法则服从结合律但并不满足交换律。

[51]

四元数也可以被解释为一个标量部分 q_0 与一个向量部分 \mathbf{q} 之和：

$$q = q_0 + \mathbf{q} \quad (3.58)$$

其中

$$\mathbf{q} = q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} \quad (3.59)$$

容易证明两个四元数的乘积可以写为：

$$pq = p_0q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q} \quad (3.60)$$

我们可以将标量、向量以及复数看作是特殊的四元数，这种看法是合理的——加法和乘法会给出我们熟悉的运算操作。如果 p 和 q 的标量部分为零，那么它们便是纯向量，并且它们的乘积中包含点积和叉积：

$$pq = p_0q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q} \quad (3.61)$$

$$= -\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{p} \times \mathbf{q} \quad (3.62)$$

注意到除了求和运算中的单位元素 0 之外，每个四元素都存在一个逆元

$$q^{-1} = q^* / |q|^2 \quad (3.63)$$

使得四元数既构成一个线性代数 (linear algebra)，同时又构成一个域 (field)。它是对复数概念的所有扩展中唯一满足既是线性代数又是域的一个扩展。

我们现在考虑使用四元数来表示空间旋转。给定某个旋转 $\text{rot}(\theta, \hat{\mathbf{n}})$ ，定义对应的单位四元数为：

$$q = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \hat{\mathbf{n}} \quad (3.64)$$

现在令 \mathbf{x} 表示一个纯向量，即，标量部分为零的一个四元数，

$$\mathbf{x} = 0 + \mathbf{x} \quad (3.65)$$

同时令向量部分为某点的直角坐标。要旋转一个点，我们构建乘积 qxq^* ，通过展开乘积并简化证明：

$$qxq^* = \left(\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \hat{\mathbf{n}} \right) \mathbf{x} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \hat{\mathbf{n}} \right) \quad (3.66)$$

$$= \cos^2 \frac{\theta}{2} \mathbf{x} + 2\cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{x} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \hat{\mathbf{n}} \mathbf{x} \hat{\mathbf{n}}^* \quad (3.67)$$

[52]

现在我们代入半角公式：

$$\cos \theta = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (3.68)$$

$$\sin \theta = 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \quad (3.69)$$

得到

$$qxq^* = \frac{1 + \cos \theta}{2} \mathbf{x} + \sin \theta \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{x} + \frac{1 - \cos \theta}{2} \hat{\mathbf{n}} \mathbf{x} \hat{\mathbf{n}}^* \quad (3.70)$$

容易证明对于一个单位向量 $\hat{\mathbf{n}}$ 和一个向量 \mathbf{n} 而言，我们有：

$$\hat{\mathbf{n}} \mathbf{x} \hat{\mathbf{n}}^* = \mathbf{x} + 2\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{x}) \quad (3.71)$$

将其代入到上面的公式中并进行简化，我们得到了关于点旋转的罗德里格斯公式，这便证明了四元数的乘积可以对一个点进行旋转操作。

$$qxq^* = \mathbf{x} + \sin \theta \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{x} + (1 - \cos \theta) \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{x}) \quad (3.72)$$

1. 四元数旋转的几何视角

尽管有上述的分析论证，单位四元数的表示似乎仍有点令人费解。人们似乎很自然地使用更接近于复数类比的表达式。那更进一步想，为什么不使用如下形式的单位四元数？

$$p = \cos \theta + \hat{\mathbf{n}} \sin \theta \quad (3.73)$$

为什么不使用表达式

$$\mathbf{x}' = p\mathbf{x} \quad (3.74)$$

即使用单个四元数乘法操作来旋转向量呢？通过从几何角度对四元数的乘积进行审视，我们可以洞察到一些东西。令 p 表示标量部分为 1 的一个单位四元数，同时考虑左乘 p 的映射 $L_p(q)$ ，其定义为：

$$L_p(q) = pq \quad (3.75)$$

那么 $L_p(q)$ 是关于四元数的四维空间中的一个旋转。这是显而易见的，如果我们使用四元数乘积的定义将 L_p 表达为一个矩阵乘积：

$$L_p(q) = \begin{pmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \quad (3.76)$$

53 那么，我们会注意到该矩阵是一个正交矩阵。

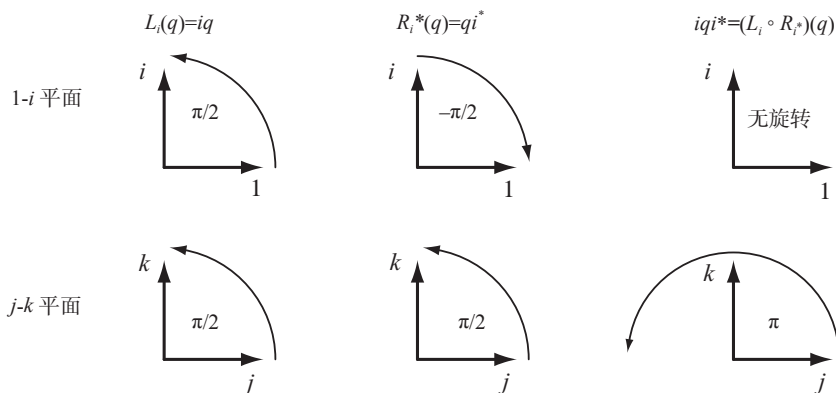


图 3-4 独立施加的单位四元数的左乘和右乘操作，图中将向量和标量子空间混合在一起。但当将它们的共轭同时施加时，它们给出了向量空间的一个旋转

虽然左乘是四维空间的一个旋转，它并不是对纯向量三维子空间的一个旋转。左乘将标量子空间和向量空间混合起来。事实上，向左乘以一个纯单位向量 p 可被描述为两个旋转。第一个旋转是 $1-p$ 平面的一个角度为 $\pi/2$ 的旋转，它将标量子空间和向量空间混合起来。第二个旋转是垂直于 1 和 p 平面的一个角度为 $\pi/2$ 的旋转，它只涉及向量空间。通过将 p 设置为基础元素 i 做一些简化之后，我们有：

$$L_i(q)=iq \tag{3.77}$$

那么根据四元数的定义，我们立即得到：

$$R_i(q) = \begin{cases} 1 \mapsto -i \\ i \mapsto 1 \\ j \mapsto k \\ k \mapsto -j \end{cases} \tag{3.78}$$

上式对应于 $1-i$ 平面的一个角度为 $\pi/2$ 的旋转，和 $j-k$ 平面的一个角度为 $\pi/2$ 的旋转，如图 3-4 所示。

类似的，我们定义 $R_p^*(q)$ 为通过右乘一个单位纯向量 p^* 而得到的映射。和前面一样，它是四维四元数空间的一个旋转，但它将 $1-p$ 平面往相反方向旋转，即，转过 $-\pi/2$ 角度；同时它将垂直平面往相同方向旋转，即转过 $\pi/2$ 角度。让我们用 i^* 元素来说明：

54

$$R_{i^*}(q) = \begin{cases} 1 \mapsto -i \\ i \mapsto 1 \\ j \mapsto k \\ k \mapsto -j \end{cases} \tag{3.79}$$

现在已经很明显了，通过把 $L_i(q)$ 和 $R_{i^*}(q)$ 组合在一起，这将使得它们所引起 $1-i$ 平面的旋转相互抵消，同时将它们引起 $j-k$ 平面的旋转相叠加，最终形成了向量空间关于 i 且转角为 π 的一个旋转：

$$iqi^* = (L_i \circ R_{i^*})(q) \begin{cases} 1 \mapsto 1 \\ i \mapsto i \\ j \mapsto -j \\ k \mapsto -k \end{cases} \quad (3.80)$$

一般情况下，对于一个纯的单位向量 n 来讲， nxn^* 是向量空间关于 n 且转角为 π 的一个旋转，它对应于罗德里格斯构造式 (3.71) 中的 $\hat{n} \times (\hat{n} \times \mathbf{x})$ 项。采用类似的方式，我们可以对罗德里格斯公式中的其他项构造几何解释，最终获得我们早先对“四元数乘积 qxq^* 实现了一般的空间旋转”证明结果的一个几何解释。

2. 通过单位四元数表示旋转的叠加

旋转 q (表示为一个单位四元数) 作用在某点 \mathbf{x} (表示为一个向量) 时的结果由下式给出：

$$qxq^* \quad (3.81)$$

经过第二个旋转 p 之后的结果如下：

$$p(qxq^*)p^* = (pq)x(pq)^* \quad (3.82)$$

3. 四元数与轴 - 角表示之间的变换

根据惯例，四元数表示为：

$$q = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \hat{n} \quad (3.83)$$

55

这给出了从轴 - 角表示到四元数表示的变换。从四元数表示到轴 - 角表示的变换如下：

$$\theta = 2 \tan^{-1}(|\mathbf{q}|, q_0) \quad (3.84)$$

$$\hat{n} = \mathbf{q} / |\mathbf{q}| \quad (3.85)$$

我们注意到，在 $\theta=0$ 的邻域内，关于转轴 \hat{n} 的公式是病态的，但这是由零旋转转轴的根本不确定性而引起的一个结果。

4. 四元数与矩阵表示之间的变换

通过将乘积 qxq^* 展开，我们可以将一个单位四元数变换为等效的旋转矩阵：

$$qxq^* = (q_0^2 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{q})\mathbf{x} + 2q_0\mathbf{q} \times \mathbf{x} + 2\mathbf{q}\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} \quad (3.86)$$

$$= \left((q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2)I + 2q_0 \begin{pmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} q_1^2 & q_1q_2 & q_1q_3 \\ q_1q_2 & q_2^2 & q_2q_3 \\ q_1q_3 & q_2q_3 & q_3^2 \end{pmatrix} \right) \mathbf{x} \quad (3.87)$$

将上式展开并化简之后，得到如下旋转矩阵：

$$\begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix} \quad (3.88)$$

现在我们考虑如何把一个旋转矩阵 (r_{ij}) 变换为一个等效的单位四元数。首先，如果我们采取式 (3.88) 中矩阵的对角线元素的不同线性组合，我们得到：

$$q_0^2 = \frac{1}{4}(1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}) \quad (3.89)$$

$$q_1^2 = \frac{1}{4}(1 + r_{11} - r_{22} - r_{33}) \quad (3.90)$$

$$q_2^2 = \frac{1}{4}(1 - r_{11} + r_{22} - r_{33}) \quad (3.91)$$

$$q_3^2 = \frac{1}{4}(1 - r_{11} - r_{22} + r_{33}) \quad (3.92)$$

56 此时我们可以取平方根，但这将产生如何正确选取正负号的问题。与之不同，我们返回到由更多公式组成的矩阵，对每对 r_{ij} 、 r_{ji} 求和并求差，得到：

$$q_0q_1 = \frac{1}{4}(r_{32} - r_{23}) \quad (3.93)$$

$$q_0q_2 = \frac{1}{4}(r_{13} - r_{31}) \quad (3.94)$$

$$q_0q_3 = \frac{1}{4}(r_{21} - r_{12}) \quad (3.95)$$

$$q_1q_2 = \frac{1}{4}(r_{12} + r_{21}) \quad (3.96)$$

$$q_1q_3 = \frac{1}{4}(r_{13} + r_{31}) \quad (3.97)$$

$$q_2q_3 = \frac{1}{4}(r_{23} + r_{32}) \quad (3.98)$$

为了获得四元数，使用前四个方程 (式 3.89 ~ 式 3.92) 来求解最大的 q_i^2 。对于平方根而言，选择正负符号都行。现在，无论我们得到什么样的 q_i ，剩余的 6 个公式中有 3 个涉及 q_i ，这样便可求解四元数中的其他三个组成部分。

5. 单位四元数表示的性质

从根本上讲，四元数是表示旋转的正确途径之一。考虑由单位四元数表示的某旋转 $\text{rot}(\hat{n}, \theta)$ ：

$$\text{rot}(\hat{n}, \theta) \mapsto q = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)\hat{n} \quad (3.99)$$

那么，在球面上连接 q 与空转元素 1 之间的最短路径，其弧长为 $\theta/2$ 。这意味着，单位四元数的球面度量对应于使用转角来测量空间旋转，这正是对空间旋转的正确度量。当然，对于任何旋转都存在两个可能的角度， θ 和 $2\pi-\theta$ ，它们分别对应于 q 与 $-q$ 这两个四元数。今后我们将假设使用较小的角度，这对应于在 q 与 $-q$ 中选择距离 1 最近的那个四元数。

四维欧氏空间 \mathbf{E}^4 中的度量也可作为空间旋转的一个度量，虽然它并不给出角度。我们可以用四元数的长度 $|p - q|$ 来测量两个四元数之间的不同，其前提是：我们选择生成最小值的那个对极点。

由于球面度量对于四元数而言确实正确，所以其拓扑结构必然是正确的。单位四元数是长度被限制为单位长度的四元组。单位四元数给出了四维欧氏空间内的一个球面。因为 q 和 $-q$ 代表同一旋转，我们可以将球面上的对极点之间彼此确定，这将生成一个三维投影空间 \mathbf{P}^3 。因此，空间旋转具有 \mathbf{P}^3 拓扑机构。单位四元数为空间旋转给出了一个使用最少数字的光滑表示[⊖]。

[57]

另一个启示是：单位四元数非常适合于生成一组随机空间旋转序列的问题。如果我们在 \mathbf{E}^4 空间中的单位球面上生成一个均匀分布，我们也获得关于旋转的一个均匀分布（怎样才能生成球面上的均匀分布？请参阅习题 3.16）。

四元数也可以实现很好的单位化。问题是，经过一些数值计算之后，（由于数值误差）我们可能得到一个不再位于球面上的四元数。为了单位化一个四元数，我们可以简单除以它的长度。

最后，在某些应用中，四元数具有非常好的计算效率（见习题 3.10）。

3.2 空间位移的表示

本节探讨用来表示空间位移的方法。最简单的一种表示方法是将位移分解成平移和旋转两部分（定理 2.2），然后用一个向量表示平移部分，再用前一小节中的任何一种方法来表示旋转部分。特别是如果我们使用旋转矩阵加向量的表示，我们将得到齐次坐标。但也有一些其他更具优势的方法，这取决于当前的问题。所以在关于齐次坐标的小

⊖ 关于此部分的详细讨论，参见原书作者电子教案第八讲内容。——译者注

节之后，将有一个关于使用旋量和旋量坐标的小节。

3.2.1 齐次坐标

回忆定理 2.2：一个位移可以被分解为一个旋转附加之后的一个平移。我们构造一个原点和坐标系，并用坐标向量来表示点。那么，我们可以用旋转矩阵来表示旋转，用向量加法来表示平移：

$$\mathbf{x}' = \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{d} \quad (3.100)$$

其中 \mathbf{R} 是旋转矩阵， \mathbf{d} 是平移向量。这是相当简单的一个公式，但通过使用齐次坐标，可以使其变得更为简单。一个点的齐次坐标是通过附加一个数值始终为 1 的第四坐标而得到：

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.101)$$

58 现在我们构建齐次坐标变换矩阵 (homogeneous coordinate transform matrix) \mathbf{T} ：

$$\mathbf{T} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{d} \\ \hline 000 & 1 \end{array} \right) \quad (3.102)$$

现在，一个点的变换可以被写成更为紧凑的形式：

$$\mathbf{x}' = \mathbf{T}\mathbf{x} \quad (3.103)$$

因此，齐次坐标变换矩阵 \mathbf{T} 可以表示位移。矩阵 \mathbf{T} 的前三列给出了位移的旋转部分，同时 \mathbf{T} 的最后一列给出了其平移部分。

使用齐次坐标，可以非常方便地表示无限远点 (扩展讨论参见附录)。令 w 表示一个点的第四坐标，并且采用 w 为比例系数这样一个约定惯例。现在，我们可将点表示为：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1/w \\ x_2/w \\ x_3/w \end{pmatrix} \quad (3.104)$$

随着 w 趋近于零，点趋向于无限远。我们采用如下惯例：齐次坐标向量：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.105)$$

表示无限远的一点。或者，等价地，该向量表示一个方向：与向量 $(x_1, x_2, x_3)^T$ 相平行的所有直线的方向，这些线相交于无限远点。注意到无限远点构成了一个平面。看起来它们似乎构成了一个三维空间，但是，当齐次坐标缩放时，无限远点并不变化。

无限远点的齐次坐标表示为变换矩阵给出了一个绝好的分解。矩阵前三列的第四个元素均为零。这三列表示无限远点，并且它们的方向对应于三个坐标轴。矩阵的第四列（其第四个元素为 1）表示坐标系原点的位置。

齐次坐标的主要特征是：变换方程是齐次的（方程 3.103），而不仅仅只是线性的（方程 3.100）（此处的“线性”一词意味着图像是一条直线，而“齐次”则是指直线穿过原点。更为现代的术语可能是称之为“线性坐标”，因为变换方程是线性的，而不只是仿射变换）。当要将连续发生的几个位移叠加时，使用齐次坐标的好处就会变得更加显而易见，组合变换可被写为：

$$T_6 T_5 T_4 T_3 T_2 T_1 \quad (3.106)$$

而非

$$R_6(R_5(R_4(\cdots) + d_4) + d_5) + d_6 \quad (3.107)$$

当然，由于我们知道空间位移构成一个群，我们可以不用齐次坐标，而使用更为简单的表达式。但这种机制（齐次坐标）很方便，它将位移分解为旋转和平移两种运算，并将代数与具体的数值运算相联系。

直接使用齐次坐标去做幼稚的数值运算很可能会没有效率。使用通用的矩阵乘法和矩阵来求逆是可行的，但通过考虑齐次坐标变换矩阵的特殊结构，可以得到更为有效的计算程序。对位移求逆只需对旋转矩阵进行转置，并对一点做变换：

$$\left(\begin{array}{c|c} R & d \\ \hline 000 & 1 \end{array} \right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} R^T & -R^T d \\ \hline 000 & 1 \end{array} \right) \quad (3.108)$$

两个位移的叠加也可使用下列更为有效的计算手段：

$$\left(\begin{array}{c|c} R_2 & d_2 \\ \hline 000 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} R_1 & d_1 \\ \hline 000 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} R_2 R_1 & R_2 d_1 + d_2 \\ \hline 000 & 1 \end{array} \right) \quad (3.109)$$

3.2.2 旋量坐标

我们在 2.4 节中已经介绍了旋量概念：它是空间中带有旋距的一条线。旋量坐标（screw coordinates）是用来表示旋量的一种方法。不过，我们首先必须探索一下普吕克坐标（Plücker coordinates），该坐标可用来描述空间中的线[⊖]。

⊖ 为何要使用线坐标的原因，参见原书作者电子教案第九讲内容。——译者注

1. 普吕克坐标

一条直线的方程可由下列参数化形式给出：

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{q} \quad (3.110)$$

其中 \mathbf{p} 是直线上的任意一点， \mathbf{q} 是表示直线方向的一个向量。令 \mathbf{q}_0 由下式给出：

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{p} \times \mathbf{q} \quad (3.111)$$

那么，有序对 $(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0)$ 构成了这条直线的六个普吕克坐标，如图 3-5 所示。我们称 \mathbf{q} 为方向向量 (direction vector)， \mathbf{q}_0 为矩向量 (moment vector)。

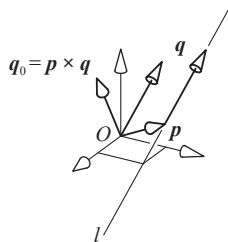


图 3-5 使用 Plücker 坐标来表示一条线

此时有个很明显的问题，为什么要使用叉积？为什么不直接使用的点和方向 (\mathbf{p}, \mathbf{q}) ，更简单地说，为什么不直接使用两个点？我们很快将会看到，普吕克坐标能够简化很多与直线相关的计算。但是还有一个更基本的原因：普吕克坐标是对直线的一个近似规范的表示。空间中的一条直线可由四个数字来确定，这比确定刚体位形所需的六个数值少两个，这是因为沿某直线平移或者绕该直线旋转，会把该直线映射回它本身。所以在六个普吕克坐标中，有两个是冗余的。对这两个冗余参数，我们可以做如下考虑。第一，因为 $\mathbf{q}_0 = \mathbf{p} \times \mathbf{q}$ ，任何一组普吕克坐标必须得满足方程：

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}_0 = 0 \quad (3.112)$$

第二，我们可以对普吕克坐标进行缩放 (乘以非零标量 k)，而使直线保持不变：

$$(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0) \equiv k(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0) \quad (3.113)$$

通过缩放 $1/|\mathbf{q}|$ 倍的方式对普吕克坐标进行单位化有时会比较方便，但是我们将看到一些例子，其中没有单位化的普吕克坐标已满足要求[⊖]。

[61]

阅读理解普吕克坐标真的非常简单；存在下列三种情况。

一般情况：如图 3-6 所示，一般情况下坐标中的 \mathbf{q} 和 \mathbf{q}_0 均不等于零。方向向量 \mathbf{q} 平行于直线， \mathbf{q}_0 则垂直于包含原点和该直线的平面， $|\mathbf{q}_0|/|\mathbf{q}|$ 给出了从原点到直线的距离。

通过原点的直线 $(\mathbf{q}, \mathbf{0})$ ：第二种情况出现在当直线穿过原点，如图 3-7 左图所示。这其实是一般情况的一个简单特例，此时 \mathbf{q}_0 已经变为零。

⊖ 通过式 (3.112) 和式 (3.113) 可知，普吕克坐标是另一种形式的齐次坐标。——译者注

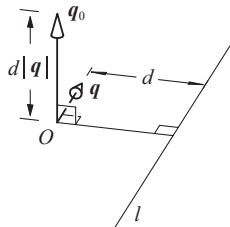


图 3-6 普吕克坐标的一般情形

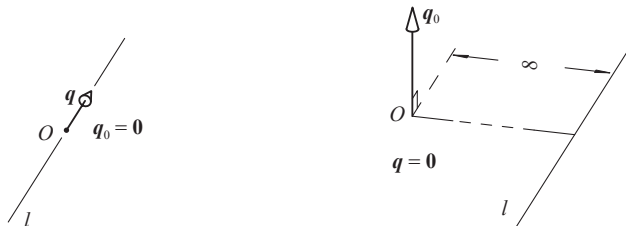


图 3-7 普吕克坐标的特殊情形：通过原点的直线和处于无限远处的直线

无限远处的直线 $(0, q_0)$ ：第三种情况更有趣，出现在当方向向量 q 变为零的时候。审视它的一种方式是在写一般情况下的普吕克坐标，然后使用矩（moment）向量的幅值大小 $|q_0|$ 对其单位化：

$$\left(\frac{q}{|q_0|}, \frac{q_0}{|q_0|} \right) \quad (3.114)$$

62

现在考虑当直线趋向无限远时的极限过程。如果我们使用方向向量进行单位化，那么矩向量将会随距离直线的距离而成比例地增加。但是，因为我们使用矩向量进行单位化，方向向量将会随距离直线的距离而反比例地缩小，在极限处变为 0 。

对于无限远处的一条直线，看起来我们好像已经失去了一些重要信息，因为我们没有方向向量。但是当我们注意到，无限远处的直线其实是垂直于矩向量的所有平面集合的交点，显而易见矩向量确实是完全确定了该条直线。

$(0, 0)$ 这一普吕克坐标没有意义。

使用普吕克坐标，我们可以很容易地确定两条线之间的矩，以及两条直线之间的最短距离和它们之间的夹角。我们将以矩作为开始。假设给定两条直线 l_1 和 l_2 ，如图 3-8 所示。令 p_1 和 p_2 分别为 l_1 和 l_2 上的点，令 q_1 和 q_2 分别表示 l_1 和 l_2 的方向。那么，类比于力关于某点或某条直线的力矩，我们可以定义直线 l_2 关于点 p_1 的矩为：

$$(p_2 - p_1) \times \frac{q_2}{|q_2|} \quad (3.115)$$

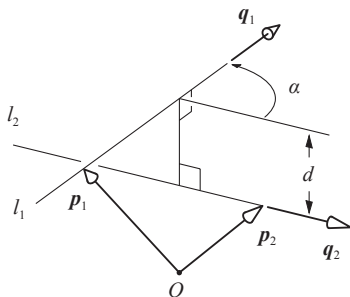


图 3-8 两条直线之间的矩的几何构造

我们可以定义直线 l_2 关于直线 l_1 的矩为：

$$\frac{\mathbf{q}_1}{|\mathbf{q}_1|} \cdot (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \times \frac{\mathbf{q}_2}{|\mathbf{q}_2|} \quad (3.116)$$

经过简化后得到如下表达式：

$$\frac{\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_{02} + \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_{01}}{|\mathbf{q}_1| |\mathbf{q}_2|} \quad (3.117) \ominus$$

63 注意到普吕克坐标给我们的其实是有向 (directed) 直线，而上述表达式给我们的则是带符号的矩[⊖] (signed moment)，它与直线方向一致。公式 (3.117) 中的分子包含了我们将要不断遇到的一个运算：

定义 3.2： 我们定义两组普吕克坐标的虚积 (virtual product)，也称为对偶积 (reciprocal product)，如下：

$$(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) * (\mathbf{q}, \mathbf{q}_0) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}_0 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}_0 \quad (3.118)$$

如果我们使用单位化的普吕克坐标，那么虚积将给出两条有向直线之间的符号矩。

如果 d 是 l_1 和 l_2 这两条直线之间的最短距离， $\alpha \in [0, \pi]$ 是直线 l_1 和 l_2 之间的夹角，那么 l_1 和 l_2 之间的矩由 $d \sin \alpha$ 给出。注意到：

$$|\mathbf{q}_2 \times \mathbf{q}_1| = |\mathbf{q}_1| |\mathbf{q}_2| \sin \alpha \quad (3.119)$$

我们可以让两个关于矩的公式相等，得到：

$$d = \frac{|(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_{01}) * (\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_{02})|}{|\mathbf{q}_2 \times \mathbf{q}_1|} \quad (3.120)$$

⊖ 式 (3.117) 的推导见原书作者电子教案第 9 讲。该公式的结果是对称的，即直线 l_2 关于直线 l_1 的矩 = 直线 l_1 关于直线 l_2 的矩。——译者注

⊖ 我们可简称其为符号矩。——译者注

注意到两条直线 l_1 和 l_2 相交，当且仅当：

$$(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_{01}) * (\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_{02}) = 0 \quad (3.121)$$

其中，平行线被认为是在无限远处相交。当两线平行时，两线之间的距离表达式将会无效。

实例

考虑在一个立方体（图 3-9）相邻面内的对角线。直线 l_1 的描述如下：

$$\mathbf{p}_1 = (1, 0, 0) \quad (3.122)$$

$$\mathbf{q}_1 = (0, 1, 1) \quad (3.123)$$

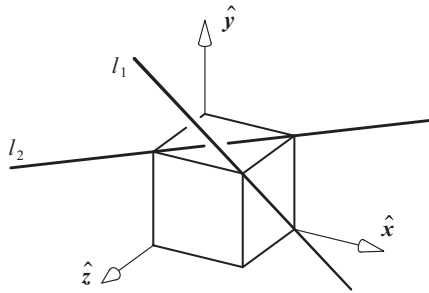


图 3-9 普吕克坐标的例子

直线 l_2 的描述如下：

$$\mathbf{p}_2 = (0, 1, 1) \quad (3.124)$$

$$\mathbf{q}_2 = (-1, 0, 1) \quad (3.125)$$

为了完成这两条直线的普吕克坐标，我们做下列计算：

$$\mathbf{q}_{01} = \mathbf{p}_1 \times \mathbf{q}_1 = (0, -1, 1) \quad (3.126)$$

$$\mathbf{q}_{02} = \mathbf{p}_2 \times \mathbf{q}_2 = (1, -1, 1) \quad (3.127)$$

所以两线之间的距离为：

$$d = \frac{|(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_{01}) * (\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_{02})|}{|\mathbf{q}_2 \times \mathbf{q}_1|} = 1/\sqrt{3} \quad (3.128)$$

而它们之间的夹角给出如下：

$$\alpha = \arcsin \frac{|\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2|}{|\mathbf{q}_1| |\mathbf{q}_2|} = \arcsin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 60^\circ \quad (3.129)$$

2. 旋量坐标

回想一下：旋量是空间中带有旋距的一条线。我们如何为一个旋量分配坐标呢？我们可以通过使用直线（注：即旋量轴线）的6个普吕克坐标值、外加对应于旋距的第7个数字来表示旋量。但是请记住：普吕克坐标有冗余数字。我们可以使用这个冗余对旋距编码，而无需添加第7个数字。

考虑一个旋量，其轴线由普吕克坐标 (q, q_0) 给出，其旋距由标量 p 给出。如果旋距是有限的，我们定义旋量坐标为 (s, s_0) ，其中：

$$s = q \quad (3.130)$$

$$s_0 = q_0 + pq \quad (3.131)$$

64
?
65

如果旋距是无限的，我们可以对其做明显的扩展，并定义旋量坐标为：

$$s = \mathbf{0} \quad (3.132)$$

$$s_0 = q \quad (3.133)$$

将这个定义与在无限远处直线的普吕克坐标进行比较，一个具有无限旋距的旋量与一个轴线处于无限远的旋量看似无法区分，但旋距对于轴线处于无限远的旋量没有意义。

对于具有有限旋距和有限远轴线的旋量，由于两个普吕克向量是正交的 ($q \cdot q_0 = 0$)，通过取两个旋量坐标向量的点积，我们可以从中恢复旋距 p ，如下所示：

$$s \cdot s_0 = q \cdot q_0 + pq \cdot q \quad (3.134)$$

$$p = \frac{s \cdot s_0}{s \cdot s} \quad (3.135)$$

获得旋量轴线的方向也很简单——它就是 s 。最后，旋量轴线上距离原点最近的点给出如下：

$$r = \frac{s \times s_0}{s \cdot s} \quad (3.136)$$

3. 运动旋量的旋量坐标

回想 Chasles 定理 (定理 2.7)：任何一个空间位移都是关于某个旋量的运动旋量——平移和旋转，它们之间的比率由旋距确定。令 θ 表示旋转角度，令 d 为旋量的旋距。那么运动旋量便是围绕轴线 l 且角度为 θ 的一个旋转，同时外加一个沿轴线 l 的距离为 d 的平移。旋距 p 为平移与旋转之间的比率，并且它有长度量纲。有限的旋距对应于 d/θ 。

要表示一个位移，我们需要包括运动旋量的幅值大小。幸运的是，我们仍有一个多

余参数可以使用。对于一般的旋量（有限远轴线，有限旋距），我们单位化旋量坐标然后缩放 θ 倍得到：

$$\left(\theta \frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|}, \theta \frac{s_0}{|\mathbf{s}|} \right) \quad (3.137)$$

将其代入到旋量坐标中，我们得到：

$$\left(\theta \frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|}, \theta \frac{s_0}{|\mathbf{s}|} \right) = \frac{1}{|\mathbf{q}|} (\theta \mathbf{q}, \theta q_0 + \theta p \mathbf{q}) \quad (3.138)$$

$$= \frac{1}{|\mathbf{q}|} (\theta \mathbf{q}, \theta q_0 + d\mathbf{q}) \quad (3.139)$$

66

对一个具有无限旋距的运动旋量，例如平移，这个定义可以自然延伸到：

$$(\mathbf{s}, s_0) = \frac{1}{|\mathbf{q}|} (\mathbf{0}, d\mathbf{q}) \quad (3.140)$$

正如旋量坐标定义中所指的那样，一个具有无限旋距的旋量（平移）与一个具有无限远轴线的旋量（围绕无限远处轴线的旋转）是无法区分的。同时也注意到平移轴线的短部分无法恢复。旋量坐标给予我们的是轴线的方向，而不是它的位置。这很好地反映了空间位移的性质。由于平移将所有点沿平行线移动，所以这些平行线中的任何一条都可作为旋量轴线。

另外一种特殊情况也应予以考虑。一个零旋距（zero pitch）旋量对应于纯旋转的运动旋量，此时旋量坐标与普吕克坐标完全相同：

$$(\mathbf{s}, s_0) = (\mathbf{q}, q_0) \quad (3.141)$$

4. 速度旋量的旋量坐标

速度旋量（differential twist）[⊖]的旋量坐标是特别有用的。事实证明，它们也广为人知——它们与速度向量和角速度向量的使用完全相同。考虑图 3-10 中的例子，假设旋量的轴线为 l ，其关于 l 的角速度为 ω ，沿 l 的平移速度为 \mathbf{v} 。令 \mathbf{p} 为 l 上的任意一点。角速度向量 ω 给出了 l 的方向，因此 l 的普吕克坐标为：

$$(\mathbf{q}, q_0) = (\omega, \mathbf{p} \times \omega) \quad (3.142)$$

旋量的旋距为 $|\mathbf{v}|/|\omega|$ ，因此旋量坐标为：

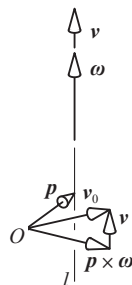


图 3-10 速度旋量的旋量坐标

67

⊖ 字面翻译为：微分运动旋量。——译者注

$$(s, s_0) = \left(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{|\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{\omega}|} \boldsymbol{\omega} \right) \quad (3.143)$$

由于速度平行于角速度， $(|\boldsymbol{v}|/|\boldsymbol{\omega}|)\boldsymbol{\omega}$ 即为 \boldsymbol{v} ，得到如下旋量坐标：

$$(s, s_0) = (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{v}) \quad (3.144)$$

第二个向量 s_0 即为全局固定坐标系原点处一点的速度 \boldsymbol{v}_0 的一个表达式：

$$(s, s_0) = (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{v}_0) \quad (3.145)$$

所以对于速度旋量使用旋量坐标与物理学导论教材中的标准做法是相接近的。这个观察结果有一个重要的推论：“速度旋量的旋量坐标构成了一个向量空间”。我们可以对速度旋量坐标求和，也可将它们与标量相乘。

3.3 运动学约束

本节将对在运动学约束的一阶模型中使用旋量坐标进行推导。我们还将第5章中继续这一话题，研究多面体凸锥和各种相关构造。

在前面的章节中，我们学习了使用简单的图形化方法（Reuleaux方法）来分析平面系统的运动学约束。旋量坐标给出了一个与Reuleaux方法相类似但适用于三维情形的方法[⊖]。

我们关于运动学约束的一阶模型为：

$$\hat{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{v}_p = 0 \quad (3.146)$$

其中 $\hat{\boldsymbol{u}}$ 是空间中的某方向向量（接触法向向量）， p 是被约束物体上的某点，而 \boldsymbol{v}_p 是点 p 的运动微分（即速度）。这是一个双边约束，单边约束将会被表示为一个不等式的形式。

现在，假设所述物体的速度旋量由旋量坐标 $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{v}_0)$ 给出，它们与物体的角速度，以及处于全局固定坐标系原点处的一点速度相同。那么，点 p 的速度由下式给出：

$$\boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{p} \quad (3.147)$$

68 所以，运动学约束可被写为

$$\hat{\boldsymbol{u}} \cdot (\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{p}) = 0 \quad (3.148)$$

⊖ 本节内容参加原书作者电子教案第10讲。Reuleaux图形化方法十分适合人工使用，但它并不适用于计算机，而且该方法无法拓展到更高维度。——译者注

经过一些重新整理之后，得到如下方程：

$$\hat{u} \cdot v_0 + (p \times \hat{u}) \cdot \omega = 0 \quad (3.149)$$

这个方程很快就会让人想起定义在普吕克坐标之上的对偶积操作。因此，我们可以定义一个接触旋量（contact screw）来描述接触法线：

$$(c, c_0) = (\hat{u}, p \times \hat{u}) \quad (3.150)$$

并将运动学约束写为：

$$(c, c_0) * (\omega, v_0) \quad (3.151)$$

其中 * 是扩展到旋量坐标上的对偶积（或虚拟积）：

$$(s, s_0) * (t, t_0) = s \cdot t_0 + s_0 \cdot t \quad (3.152)$$

注意到接触旋量 $(\hat{u}, p \times \hat{u})$ 是一个零旋距旋量，因此它是接触法线的普吕克坐标。

定义 3.3： 如果一对旋量的对偶积分别为零、正值或负值，那么它们是对偶的（reciprocal）、相反的（contrary）或者互斥的（repelling）[⊖]。

因此，一个双边的运动学约束要求速度旋量与接触法线之间是对偶的。一个单边约束则要求速度旋量与接触法线之间是对偶的或者是互斥的。

接触旋量永远是一个零旋距旋量。如果我们将物体运动旋量限制为一个纯旋转，那么它也可以由一个零旋距旋量来表示。在这种情况下，只有当两轴之间的矩消失时对偶积才会消失，即，只有当旋转轴线与接触法线相交时，两个旋量才是对偶的。这正是用于分析平面约束的 Reuleaux 图解法之下所掩藏的观测结果。

例 1

假设我们将六个手指放置在一个立方体上。这些手指被分成两组（每组三个），分别处于对角的两个相反的角落，如图 3-11 所示。虽然这些都是单边约束，我们将考虑更为简单的双边问题。这六个接触旋量为：

$$(s_1, s_{01}) = (1, 0, 0, 0, 1, 0) \quad (3.153)$$

$$(s_2, s_{02}) = (0, -1, 0, 1, 0, 0) \quad (3.154)$$

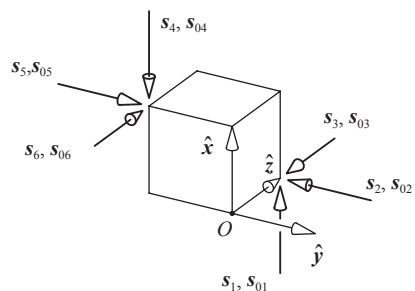


图 3-11 例 1 的构建，其中使用旋量坐标来分析单边约束

⊖ 在中文翻译里，对偶旋量有时也称互易旋量、反螺旋或逆螺旋。——译者注

$$(\mathbf{s}_3, \mathbf{s}_{03}) = (0, 0, -1, 0, 0, 0) \quad (3.155)$$

$$(\mathbf{s}_4, \mathbf{s}_{04}) = (-1, 0, 0, 0, 0, -1) \quad (3.156)$$

$$(\mathbf{s}_5, \mathbf{s}_{05}) = (0, 1, 0, 0, 0, 1) \quad (3.157)$$

$$(\mathbf{s}_6, \mathbf{s}_{06}) = (0, 0, 1, -1, -1, 0) \quad (3.158)$$

令 $(\mathbf{t}, \mathbf{t}_0)$ 为一个与运动学约束相一致的速度旋量。那么它与每个接触旋量对偶积必须为零:

$$\begin{array}{cccccc} t_4 & & & +t_{12} & & = 0 \\ & -t_5 & & +t_1 & & = 0 \\ & & -t_6 & & & = 0 \\ -t_4 & & & & -t_3 & = 0 \\ & t_5 & & & +t_3 & = 0 \\ & & t_6 & -t_1 & -t_2 & = 0 \end{array} \quad (3.159)$$

该问题的解具有如下形式:

$$(\mathbf{t}, \mathbf{t}_0) = k(1, -1, -1, 1, 1, 0) \quad (3.160)$$

其中, k 为任意标量。这个速度旋量的旋距为零, 所以我们再次得到一般形式的普吕克坐标。读者很容易验证这是一套关于立方体对角线的微分旋转 (即角速度)。

例 2

如何使用旋量坐标来表示平面运动呢? 我们可以通过构建一组合适的空间约束来得到这个问题的答案。我们将选择与 \hat{z} 轴平行的三个双边约束 (如图 3-12), 这些约束的旋量坐标为:

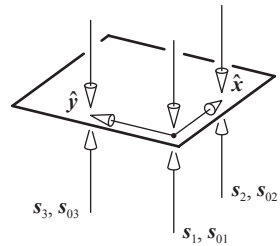


图 3-12 例 2 的构造, 其中使用旋量坐标来分析双边约束

$$(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_{01}) = (0, 0, 1, 0, 0, 0) \quad (3.161)$$

$$(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_{02}) = (0, 0, 1, 0, -1, 0) \quad (3.162)$$

$$(\mathbf{s}_3, \mathbf{s}_{03}) = (0, 0, 1, 1, 0, 0) \quad (3.163)$$

令运动旋量给出如下:

$$(\mathbf{t}, \mathbf{t}_0) = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) \quad (3.164)$$

这个运动旋量必须与 $(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_{01})$ 相对偶:

$$t_6 = 0 \quad (3.165)$$

该运动旋量必须与 (s_2, s_{02}) 相对偶:

$$t_6 - t_2 = 0 \quad (3.166)$$

该运动旋量必须与 (s_3, s_{03}) 相对偶:

$$t_6 + t_1 = 0 \quad (3.167)$$

因此, 运动旋量必须具有如下形式:

$$(\mathbf{t}, \mathbf{t}_0) = (0, 0, t_3, t_4, t_5, 0) \quad (3.168)$$

69
71

上式将旋量坐标限制于平面运动。这是一个零旋距的旋量, 对应于一个纯旋转。运动旋量的前三个坐标给出了旋转轴线的方向——它平行于 \hat{z} 轴。我们可以使用公式 (3.136) 来得到其在 $\hat{x}-\hat{y}$ 平面内的旋转中心:

$$\frac{\mathbf{t} \times \mathbf{t}_0}{\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}} = (-t_5 t_3, t_4 t_3, 0) / t_3^2 \quad (3.169)$$

作为一个特殊情况, 当 $t_3 = 0$ 时, 我们得到一个纯的平移速度 $(t_4, t_5, 0)$ 。

3.4 文献注释

本章的很多内容出自 (Korn 和 Korn, 1968)。(Salamin, 1979) 对四元数有非常好的介绍。(Altmann, 1989) 中提供了关于四元数的一些有趣的历史记录。关于欧拉角的一些资料改编自 (Crenshaw, 1994)。关于旋量坐标的材料源自 (Roth, 1984) 和 (Ohwovorirole, 1980)。习题 3.8 出自对 Kane 和 Levinson 的论文的阅读理解 (1978)。指数积 (matrix exponential) 提供了另一种方式来表示旋转和位移, 并且给人一些额外的启发。对该方法较好的介绍, 参照 (Murray 等人, 1994)。

习题

- 3.1: 我们需要为四维空间中的一个刚体分配多少个自由度? 提示: 齐次坐标在任意维度的空间中都可适用。
- 3.2: 证明齐次变换矩阵的逆矩阵表达式 (3.108), 证明两个齐次变换矩阵叠加组合之后的表达式 (3.109)。
- 3.3: 当相对于移动坐标、而非固定坐标描写矩阵的表达式时, 矩阵叠加顺序应该从左到右, 而非从右到左。例如, 如果我们先绕 \hat{x} 轴旋转 30° , 然后绕变换后的 \hat{y} 轴旋转 90° , 叠加后的复合变换由下式给出

$$\mathbf{p}' = \text{rot}(\hat{\mathbf{y}}', 90) \text{rot}(\hat{\mathbf{x}}, 30) \mathbf{p} \quad (3.170)$$

但是，同样的旋转可被写为：

$$\mathbf{p}' = \text{rot}(\hat{\mathbf{x}}, 30) \text{rot}(\hat{\mathbf{y}}, 90) \mathbf{p} \quad (3.171)$$

即，使用变换后的坐标（也称当前坐标系），按照从左到右的顺序叠加，而非从右到左的顺序。通常这比较容易，但这里请证明这种方法可行。

72

3.4：习题 3.3 的一个推论是：在固定坐标系内进行的一组旋转序列，其（正向）叠加结果与同一组旋转序列在变换后的坐标系（即当前坐标系）内的反向叠加结果相同。抽象看来这似乎令人难以置信，但是当将其具体化之后则变得明显。建造一个平衡环架机构（gimbal mechanism）[⊖]，并在其上尝试一些旋转序列。

3.5：对于欧拉角，证明其存在 24 种不同的可能惯例。

3.6：重复 3.1 节中的分析，使用 ZYX 欧拉角：三个数字将代表关于 $\hat{\mathbf{z}}$ 、 $\hat{\mathbf{y}}$ 、 $\hat{\mathbf{x}}$ 的连续旋转。

3.7：在欧拉角的定义中，连续旋转是围绕正交轴进行的。这种限制是否是必须的？

3.8：当使用万向坐标（其定义见下文）来描述空间旋转时，会产生一个有趣的悖论。假设我们有某个平衡环架（也称万向支架）——它是通过转动关节相连的四个连杆。当该机构处于“复位”位置（home position）时，三个关节的转轴分别沿 $\hat{\mathbf{z}}$ 、 $\hat{\mathbf{y}}$ 、 $\hat{\mathbf{z}}$ 轴。因为这些关节是连续布置的，第一关节的运动将会影响到第二关节轴和第三关节轴的位置，并且第二关节的运动将会影响到第三关节轴的位置。该装置是 ZYZ 欧拉角的一个物理实现，它将各关节角度连锁映射到最后一个连杆的姿态角上。我们将把这三个关节角度称为万向坐标（gimbal coordinates）

$$\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)$$

现在令 A 和 B 表示最后一个连杆的任意两个姿态角，同时令 \mathbf{g}_A 和 \mathbf{g}_B 为对应的万向坐标。现在，对于从 A 到 B 的一个旋转，我们将分配角度 $\mathbf{g}_{AB} = \mathbf{g}_B - \mathbf{g}_A$ 。令 O 表示复位位置，其万向坐标表示为 $(0,0,0)$ ，此时有 $\mathbf{g}_{OA} = \mathbf{g}_A$ 。实际上，我们用万向坐标的差来表示空间旋转。但是现在考虑 \mathbf{g}_{OA} 和 \mathbf{g}_{AB} 这两个连续旋转。它们可以按照任何顺序进行，这是因为每个关节只是将数字加起来。无论采用哪种顺序，最后一个连杆的最终结果仍然为 B ，并且组合旋转为 \mathbf{g}_{OB} 。显然，这种方法构成了对空间旋转的一个服从交换律的表示，尽管我们知道旋转顺序是不可交换的。解释这个悖论（我会声称：对于空间旋转而言，万向坐标并不是一个很好的表示方法。因

⊖ “平衡环架”有时也称“万向支架”或“万向架”，它常用于机械式陀螺仪。该机构为彼此垂直的枢纽轴组成的一组三只环架，使得放置在最内环架上物体的姿态或旋转轴不变。——译者注

此，本题中的解答将能填补这一主张中的细节。)

73

3.9: 泡利自旋 (Pauli spin) 矩阵为:

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.172)$$

$$\mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (3.173)$$

$$\mathbf{S}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.174)$$

其中 $i = \sqrt{-1}$ 。证明四元数可按如下方式建立: 使用 2×2 的单位矩阵 \mathbf{I}_2 , 以及 $-i\mathbf{S}_1$ 、 $-i\mathbf{S}_2$ 、 $-i\mathbf{S}_3$ 这三个矩阵, 作为向量基中的四个元素。

(泡利自旋矩阵与 Cayley-Klein 参数密切相关。上述构造将四元数 (q_0, q_1, q_2, q_3) 映射到矩阵

$$\begin{pmatrix} q_0 - iq_3 & -q_2 - iq_1 \\ q_2 - iq_1 & q_0 + iq_3 \end{pmatrix} \quad (3.175)$$

Cayley-Klein 参数是矩阵的四个组成部分。)

3.10: 比较旋转矩阵与单位四元数的计算效率。对于每一种方法, 确定旋转一个点以及叠加两个旋转所需的存储要求, 确定所需的浮点加法和乘法运算数。

3.11: 建立与下列旋转相对应的四元数: 零旋转和关于各坐标轴转动 π 和 $\pi/2$ 的旋转。

3.12: 证明单位四元数 q 和 $-q$ 将给出相同的旋转。

3.13: 对于如下矩阵所描述的旋转, 求解转轴和转角, 单位四元数和欧拉角。

$$\begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

74

3.14: 对于如下矩阵所描述的旋转, 求解转轴和转角, 单位四元数和欧拉角。

$$\begin{pmatrix} -2/3 & 2/15 & 11/15 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 14/15 & 2/15 \end{pmatrix}$$

3.15: 给定 $p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$ 和 $q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ 这两个四元数, 求解乘积 $r = pq$ 中各部

分的表达式。例如： $r_0 = p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3$ 。

3.16: 对于这个问题, 你将要做一个实验来回答以下问题: \mathbf{E}^3 中所有旋转的平均角度是多少?

1) 写代码来生成均匀分布的单位四元数。

2) 写代码生成与给定的一个四元数相对应的最小的转角, 角度范围从 0 到 π 。

3) 写代码来生成大量的均匀分布的单位四元数, 求解平均角度。

如何在 \mathbf{E}^4 空间中的一个球面上生成一个均匀分布? 一个简单方法是在 $[-1,1]$ 这个区间内均匀地生成四个实数。这定义了立方体上的一个均匀分布。如果我们丢弃所有幅值大于 1 的四元组, 我们将得到球体内部的一个均匀分布。单位化以获得球面上的一个均匀分布。

3.17: 写出图 2-19b 中的三个接触约束的旋量坐标。通过合理选择原点、缩放比例以及坐标轴, 你可以使问题简化。

3.18: 考虑一个八面体, 其顶点分别为 $(0,0,1)$ 、 $(0,0,-1)$ 、 $(0,1,0)$ 、 $(0,-1,0)$ 、 $(1,0,0)$ 和 $(-1,0,0)$ 。挑选两条既不相交也不平行的边, 求解每条边的普吕克坐标。使用对偶积和叉积来求解这两条边之间的距离和夹角, 参考式 (3.128) 和式 (3.129) 所在的例子。