Good Math

第一部分

# 数 字

当你想到数学的时候，首先映入脑海的多半是数字。数字具有非常神奇的吸引力。但是，当你深入地思考数字是什么时，你会吃惊地发现，我们中的大多数人对它知之甚少。

如何准确定义数字？什么样的数字是实数？或者说，什么是实数？有多少数字？ 有多少种不同类型的数字？

我不可能告诉你所有关于数字的知识，这些知识可以写 20~30 本书。但是，我可以带你开启一段数字之旅，给你介绍数字的基本知识，然后一起看看一些奇异和有趣的数字。

# 第1章

Good Math

# 自　然　数

什么是数字？

在数学中，我们可以从几个角度来回答这个问题。我们可以从语义的角度回答，即数字的含义是什么。或者，我们可以从公理的角度回答，即数字是怎样定义的。或者，我们也可以从构造的角度回答，即数字是怎样从一些简单对象构造而来的。

我们从语义开始，数字的含义是什么？每个人都认为自己知道这个问题的答案，而大多数情况下，他们都错了！大家觉得数字只是一个计数的工具，但是这并不符合事实。根据不同的使用场景，数字有两种不同的含义。

有两种类型的数字。当看见数字 3 的时候，你并不能真正理解它的含义。数字 3 可以有两种不同的含义，所以当你不知道你在使用其中哪个含义时，它是多义性的。数字 3 可以是“我有三个苹果”里的 3，也可以是“我得了第三名”里的 3。“三个苹果”里的 3 是基数，而“第三名”里的 3 是序数。

基数记录了一组物体的数量。当我说“我想要三个苹果”时，3 是一个基数。序数记录了一个物体在一组物体里面的排名。当我说“我想要第三个苹果”时，3 是一个序数。在英语里，这个区别很明显，因为英语有一种序数的语法形式。“three”是基数，

“third”是序数。它们在语法上就不一样，因而可以非常明显地看出哪个是基数哪个是序数。

从数学的集合论基础说起，才会发现基数和序数的真实区别。第 16 章会详细地介绍集合论。现在，我们只需要知道一个基础的概念：“基数”用来记数，“序数”用来定位。

公理定义的数字更加有意思。在公理化定义中，我们看到的是一些规则的集合，称为公理。公理定义了数字（或者你要定义的其他概念）需要遵守的规则。在数学上，我们总是倾向于公理化定义，因为公理化定义可以消除所有的多义性。公理化定义不够直观，但是绝对精确，并且可以用作形式化推理的依据。

## 1.1　自然数的公理化定义

我们将从一组基础的数字说起：自然数。自然数（记为 $\mathbf{N}$）是大于等于 0 且没有小数部分的数字。

当你说到数字的时候，通常是指自然数，因为自然数是最基础的数字。自然数是我们小时候最先接触的数字。自然数是从 0 开始的整数，没有小数部分，一直增大到正无穷：0，1，2，3，4，…（像我这样的计算机科学家对自然数总是情有独钟，因为所有可计算的事物都可以用自然数表示）。

事实上，自然数是由称为*皮亚诺算术*（Peano arithmetic）的一组规则定义的。皮亚诺算术使用几个公理来定义自然数。

*初始值规则*：0 是一个特殊的自然数。

*后继规则*：对于任何一个自然数 $n$，总是存在称作它后继的另外一个自然数 $s(n)$。

前继规则：0不是任何自然数的后继，除了0以外的任何自然数都是某个自然数的后继，这个数称为前继。如果有两个自然数$a$和$b$，如果$b$是$a$的后继，那么$a$就是$b$的前继。

唯一性规则：任意两个自然数不能有相同的后继。

相等规则：自然数可以进行相等比较。这条规则有三条子规则：自反性，即每个自然数都和它自身相等；对称性，即如果$a=b$，那么$b=a$；传递性，即如果$a=b$，$b=c$，那么$a=c$。

归纳规则：对于某个陈述$P$，我们说$P$对于全部自然数是真的，如果

1. 对于自然数0，陈述$P$是真的（记作$P(0)$是真的）。

2. 如果对于某个自然数$n$，陈述$P$是真的（即$P(n)$是真的），那么你能证明陈述$P$对$n$的后继$s(n)$也是真的（即$P(s(n))$是真的）。

所有这些规则只是“自然数是从0开始的没有小数部分的整数”的一种更加新潮的说法。大部分人第一眼看到皮亚诺规则的时候，会觉得这些规则除了最后一条之外还是很容易理解的。归纳法是一种颇具技巧性的思想。我知道，在我第一次看到归纳证明时，我肯定没有明白它的本质，我感觉被循环绕进去了，被弄得晕头转向。但是，归纳是必不可少的：因为自然数是一个无限的集合，所以只有当我们能够以某种推理将有限扩展到无限时，才能说某个陈述关于这个无限的集合是真的。归纳的任务就是将有限对象延伸推理到无限集合。

当你熟悉了公理的形式后，归纳法真正想说的是：存在某种你可以使用的模式。如果你有一个适用于第一个数字的定义，那么就可以通过一个加1操作将其推理到所有其他的数字。通过这

样的模式，你能证明对于所有自然数这个定义是正确的。或者，可以写出适用于所有自然数的定义。我们可以在所有整数、小数或者实数上使用相似的技巧。

与证明相比，定义更简单，因此在试图证明前，我们将先写定义。我们来看一个将归纳法应用到定义证明的例子。我们来看看加法，很容易给出自然数加法的定义。加法是两个自然数的求和，用符号“+”表示。加法的正式定义满足如下性质：

交换性：对任意一对自然数 $n$ 和 $m$，

$$n+m=m+n$$

恒等性：对任意自然数 $n$，

$$n+0=0+n=n$$

递归性：对任意自然数 $m$ 和 $n$，

$$m+s(n)=s(m+n)$$

最后一条规则就是归纳规则，并且通过递归的方式实现。因为当你不习惯用递归时，递归比较难，所以我们先不急于展开。

我们正在做的是通过皮亚诺算术里的后继规则来定义加法。如果使用“+1”和“−1”重写，等式是很容易理解的：$m+n=1+(m+(n-1))$。

为了理解，你只需要记住这是一个定义而不是一个程序。因此，这是在描述加法的含义，而不是怎么做加法。

由于皮亚诺的归纳规则，这里的最后一条规则才起作用。否则，我们该如何定义两个数字做加法的含义？归纳法给了我们一个描述任意两个自然数做加法的方法。

现在轮到证明登场了！对大多数人来说，证明往往很吓人，但是不要担心。证明其实并没有那么可怕，我们将做一个非常简

单的证明。

## 1.2 使用皮亚诺归纳法

一个关于自然数加法的简单又有趣的证明是：假如我们有一个自然数 $n$，对 1 到 $n$ 的所有整数求和，结果是多少？答案是 $\frac{n(n+1)}{2}$。那么我们该如何使用归纳法来证明这个结论呢？

我们从基础情形开始。意思是，需要从一个能自己证明自己的情形开始，然后这个情形将作为我们建立归纳的基础。在归纳法里，我们需要证明的第一条陈述的正确性是关于 0 的。因此，0 是基础情形。很容易证明上面的答案对于 0 是成立的：$(0\times(0+1))/2=0$。因此等式对于 $n=0$ 来说是成立的。这就是基础情形。

现在开始归纳部分。假设对于数 $n$ 上述答案是成立的，我们要证明它对 $n+1$ 也是成立的。接下来要做的就是归纳法的关键了，这是一个非常神奇的过程。我们想要说的是，既然我们知道该规则对于 0 是成立的，那么它肯定对于 1 也是成立的。一旦我们知道它对于 1 是成立的，那么它肯定对于 2 也是成立的。如果对于 2 是成立的，它对于 3 也是成立的，以此类推。但是我们不想一个一个地去证明，所以只是说“如果它对于 $n$ 成立，那么它肯定对于 $n+1$ 也是成立的”。通过在这里使用变量（在归纳法的框架下），我们能同时证明“如果它对于 0 成立，那么它肯定对于 1 也成立。它对于 1 成立，那么它肯定对于 2 也成立，等等”。

我们想要证明的是：

$$(0+1+2+3+\cdots+n+n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

已知：

$$(0+1+2+3+\cdots+n)=\frac{n(n+1)}{2}$$

代入，我们得到：

$$\frac{n(n+1)}{2}+n+1=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

现在，展开等式两边的乘法：

$$\frac{n^2+n}{2}+(n+1)=\frac{n^2+3n+2}{2}$$

在等式左边通分：

$$\frac{n^2+n+2n+2}{2}=\frac{n^2+3n+2}{2}$$

最后，对等式左边进行简化：

$$\frac{n^2+3n+2}{2}=\frac{n^2+3n+2}{2}$$

这就是答案，我们证明了它对于所有的自然数都是成立的！

这就是自然数的公理化版本。它们是等于0或者大于0的数字，每个数字都有一个后继，后继可以应用归纳法进行推理。几乎我们使用自然数做的所有事情（包括我们孩童时期所学的大量基础直观的数学知识）都可以通过这样的方式推理出来。

经过这些介绍，我们能说明数字是什么了吗？差不多。从数学里的数字，我们学到的是数字往往不止一个含义。数字王国里有很多种不同类型的数字：自然数、整数、有理数、实数、复数、四元数、超现实数和超实数等。但是整个数字王国是从自然数开始的。最终，那些数字的含义都可以从某种意义上归结到数量或者位置上——它们最终都是基数或序数，或者基数与序数的集合。这就是数字的含义：一种建立在数量或者位置概念基础上的事物。