第2章

Good Math

整　　数

自然数是我们最先认识的数字，但是它们完全不够用。考虑到我们使用数字的方式，最后你不可避免地需要扩展，超出自然数的范围。

如果你去一家商店买东西，通过支付金钱来换取你想买的商品。可以用 3 美元买一些面包，如果你给店主 5 美元，店主需要找你 2 美元。

当你试图利用自然数去理解这个过程时，你会发现这个过程说不通。钱沿两个不同方向流动。第一个方向是从你流向商店——花掉你的钱；第二个方向是从商店流向你——得到找零的钱。正数和负数可以让我们区分这两个流动的方向。

2.1　什么是整数

如果你有自然数而想要整数，那么你不得不做的事是添加一个加法逆元。如果你理解自然数并且想进一步理解整数，那么你只需要添加一个方向。想象一个数轴，自然数从 0 开始向右延伸，和 0 的左边没有关系；整数在自然数的基础上，加上从 0 向左延伸的负数。

整数的含义遵从方向的概念。从基数和序数两个含义上来看，正整数和自然数一模一样。负整数可以让你往另一个方向移动。如果通过基数的方式来思考，整数可以描述在集合间移动元素。如果你有一个大小为 27 的集合和另一个大小为 29 的集合，那么为了让这两个集合的大小一样，你可以选择给第一个集合添加两个元素，或者从第二个集合中去除两个元素。如果你添加两个元素给第一个集合，那么你是在用正的基数做事情。如果你从第二个集合中去除两个元素，那么你是在用负的基数做事情。

从序数的角度讲就更容易理解了。如果你正在看一个集合里的第 3 个元素，然后想看第 5 个元素，那么就正向移动 2 步，这个动作是通过正的序数描述的。如果你正在看第 5 个元素，然后想看第 3 个，那么就往回移动 2 步，这个动作是通过负的序数描述的。

让我们转向公理化的定义。整数是通过给自然数添加一个*逆*规则延伸出来的数字。从自然数集合 **N** 开始，再加上皮亚诺规则，我们只需要额外添加一个*加法逆元*的定义。非零自然数的加法逆元就是负整数。为了得到整数，我们只需要添加下面两条新的规则。

加法逆元：对于任意一个非零的自然数 n，总是存在一个不是自然数的数字 $-n$，使得 $n+(-n)=0$。我们称 $-n$ 是 n 的*加法逆元*，称自然数集合和它们的加法逆元为整数。

逆元唯一性：对于任意的两个整数 i 和 j，当且仅当 i 是 j 的加法逆元，j 才是 i 的加法逆元。

通过这些规则，我们得到了新的事物。我们之前讨论的自然数不能满足这些规则。那么新事物（负整数）是从哪儿来的？

答案有点令人失望。它们并不是从哪儿来的，它们本来就存在。在数学里，我们不能创造物体，只能描述它们。这些数字（自然数、整数、实数）存在是因为我们定义了描述它们的规则，并且这些规则相互兼容地描述了一些事物。

对于所有这些，有一种时髦的说法：整数是包括零、正数和负数的所有数字。

类似地，如果你定义了自然数上的加法，加性逆元规则足够让加法同样适用于整数。并且，因为自然数的乘法只是重复的加法，所以乘法同样适用于整数。

2.2 自然地构造整数

我们可以自然地创建数学结构来表示整数。这些结构称为整数的模型。但是，为什么可以呢？另外，模型到底是什么呢？

在一个新事物（比如整数）的模型中，我们试图证明有某种方法可以让对象遵守我们定义的公理。出于这个目的，你可以选择已经知道的事物，把它们作为“建筑的积木”。使用这些积木，你构建一些新的事物，并且让它们遵守新系统的公理。例如，说到整数，我们将拿我们已经熟悉的自然数来当积木，然后用这些积木去构建能代表整数的事物。如果我们能证明这个模型里的事物遵守自然数的公理，那么就可以知道我们对整数的定义在数学上是相兼容的。

我们为什么要做这些呢？

有两个原因让我们去构建那样的模型：第一，一个模型能证明我们的公理是有意义的。当我们写一个公理集的时候，很容易

搞砸，并且很意外地以不一致的方法写我们的模型。一个模型能证明我们没有搞砸。我们能写出一堆看起来合理的公理，但是它们可能存在一些细微的不兼容。如果真是如此，那么我们定义的事物就是不存在的，即使是在抽象的数学世界中。并且更糟糕的是，如果我们在这样的公理假设下工作，得到的每一个结论都是没有任何价值的。前面说过，整数存在的原因是我们定义了整数，并且这些定义在数学上是相兼容的。如果我们不能证明可以构建一个模型，那么就不能保证这些定义在数学上是相兼容的。

第二个原因没有第一个原因那么抽象：一个模型能让我们理解起来更简单，而且它可以描述我们构建的系统应该怎么运转。

在我们提及模型之前最后声明一次，理解这一点非常重要，我们正在做的是给出一个整数的模型，而不是这个整数的模型！我们现在做的是描述一种表示整数的可能方式，整数并不是下面即将展示的表示方式。因为整数可以有很多种表示方式，只要这些方式符合公理就可以使用。模型与它所建模事物之间的区别是微妙的，但它非常重要。整数是公理描述的事物，而不是我们的模型所构建的，模型只是其中的一种表示方式。

表示整数最简单的方式是用一对有序的自然数（a，b）来表示。一对自然数（a，b）代表整数（$a-b$）。显而易见，（2，3），（3，4），（18，19）和（23 413，23 414）都代表了同一个数。从数学的角度讲，整数是由这些自然数对的等价类组成的。

但是，什么是等价类？

当我们做构建一个整数模型这样的事情的时候，通常我们定义的方式不会针对每一个整数都创造出一个事物。我们所做的是定义了一个模型，针对这个模型里的每一个事物，该模型里有一

个集合可以描述该事物，该集合里的值都是等价的。这一组等价的值叫作等价类。

我们定义的整数模型中，通过构造一对自然数来刻画一个整数。两对数（a，b）和（b，c）是等价的：如果它们的第一个元素和第二个元素的距离相等，并且方向相同。例如（4，7）和（6，9）。在一个数轴上，为了从4走到7，你不得不往右边走3步。为了从6走到9，你仍然不得不往右边走3步。所以，它们属于同一个等价类。但是，当你观察（4，7）和（9，6）时，为了从4走到7，你将不得不往右走3步；而从9到6，你将不得不往左走3步。所以它们不属于同一个等价类。

上面这种表示方式给了我们一个简单的方法，以便我们理解如何将自然数的各种数学运算应用到整数上。我们理解自然数加法的含义，因此就可以定义整数的加法。

如果你有这里的整数模型中的两个对象，把它们定义为一对自然数：$M=(m_1, m_2)$ 和 $N=(n_1, n_2)$。它们的加法运算和减法运算的定义如下：

- $M+N=(m_1+n_1, m_2+n_2)$。
- $M-N=(m_1+n_2, m_2+n_1)$。
- 一个数 $N=(n_1, n_2)$ 的加法逆元记作 $-N$，是将这对自然数颠倒顺序后的对：$-N=(n_2, n_1)$。

减法的定义可以证明是非常漂亮的。3－5将等于（3，0）－（5，0），它与（3，0）＋（0，5）＝（3，5）是相等的，并且是－2这个等价类的一个成员。并且，加法逆元的定义也只是减法的一个自然延伸：$-N=0-N$。

从自然数到整数，我们只需要做的是：增加加法逆元。自然

数的减法，通常也需要某种语义上的加法逆元，但是这通常会使事情变得复杂化。

问题是，如果只使用自然数，你没有办法定义两个自然数的减法操作。毕竟，如果你计算 $3-5$，它的结果是没有办法使用一个自然数来表示的。但是使用整数，减法操作就实际可行了：对于任意的两个整数 M 和 N，$M-N$ 还是一个整数。使用正式的术语，我们说减法对于整数来说是一个全函数，并且整数空间对于减法来说是封闭的。

但是这也将我们引向了另外一个问题。当我们观察整数的加法运算时，就会很自然地想到减法这个加法逆元操作，并且这个操作可以通过整数的加法逆元来定义。当我们转向另一个常用的运算——乘法时，可以在自然数和整数上定义乘法，但是不能定义它的逆运算——除法，因为我们根本没有可能在整数上定义乘法逆元操作。为了将除法描述成一个定义明确的运算，我们需要有另外一种类型的数——有理数，这将在下一章介绍。