第3章 实 数

Good Math

现在我们知道了自然数和整数，这是一个非常好的开始。但是还有很多其他类型的数等待我们去认识：小数和无理数等。我们将在后面介绍。为了理解数字，我们下一步将要学习一些有非整数部分的数，它们处于整数之间，比如 1/2，－2/3 和 π。

现在，我们将看到的另一类数字是这样的：它们带有非整数部分，或者被称为实数。

在介绍实数的细节之前，需要提前说的是，我憎恨“实数”这个术语。因为它好像在暗示其他的数都不是真的，这点很愚蠢、令人讨厌和让人绝望，并且这个暗示并不是真的。事实上，这个术语本意是指虚数的另一面，虚数我们将在第 8 章介绍。虚数被命名为“虚构的”，好像是一个嘲弄（实数）的概念。因为实数这个术语已经根深蒂固，被大家广为接受，我们就只能忍一忍了。

有几种方法可以描述实数，我将使用其中的三种：首先是一个非正式的直观描述，然后是一个公理化定义，最后是一个构造性定义。

3.1 实数的非正式定义

一个非正式的、直观的描述实数的方法是使用我们在小学时

学习过的数轴。想象一条直线，它向左右延伸到无穷。可以在这条直线上任意选择一个点，并且标记为 0。在 0 的右边，你能圈出第二个点，并标记为 1。0 和 1 之间的距离就是任意两个相邻整数之间的距离。同样，向右继续走相同的距离，圈出另外一个记号并标记为 2。继续这样圈出更多你想要标记的点。然后开始从 0 往左边标记，第一个点是－1，第二个点是－2，如此往复。这就是一条基本的数轴。我已经画了一个例子，如图 3-1 所示。在这个数轴上，任意选择一个点，都是一个真实的实数。0 到 1 的一半距离是 1/2，0 到 1/2 的一半距离是 1/4。不断地这样划分下去，在任意两个实数的中间，都能找到另外一个实数。

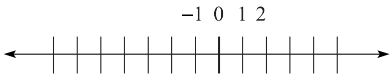

图 3-1　数轴。实数可以用这样一条从 0 开始向两边延伸到无穷的长线表示

使用这个数轴，实数的很多重要属性都可以很完美并且很直观地表示出来。加法、减法、有序性以及连续性的思想都非常显而易见。乘法可能显得棘手点，但是也可以通过数轴来解释（你可以访问我的博客，其中有一篇文章介绍如何使用滑动窗口的方法来理解乘法的原理[㊀]）。

数轴给我们带来的不是真正的实数。它们是有理数。有理数是可以表示为简单分数的数的集合：它们是一个整数与另一个整数的比。如 1/2、1/4、3/5、124 342/58 964 958。当我们看数轴时，通常想到有理数。考虑一下前面描述的数轴：“你可以一直划

㊀　http://scientopia.org/blogs/goodmath/2006/09/manual-calculation-using-aslide-rule-part-1。

分：在两个实数之间，总能找到另一个实数。”这个划分过程总是给我们提供一个有理数。把任何分数分成相等的数，结果仍然是一个分数。无论多少次使用有理数和整数进行划分，永远不会得到不是有理数的任何东西。

但是，即使使用有理数，数轴的缝隙也一直不会被填满。（我们知道一些数适合填充到这些缝隙——它们是无理数，像大家熟悉的 π、e。我们将在第 4 章介绍无理数，在第 6 章介绍 e。）看看有理数，很难看出缝隙是如何形成的。不管你做什么，不管两个有理数之间的距离有多小，都可以在它们之间设置无限数量的有理数。怎么会有缝隙呢？答案是，我们可以很容易地定义一个有限制的值序列，但是这些限制不可能是一个有理数。

对任何有理数的有限集合，把集合中的数加起来，其和是有理数。但是可以定义无限数量的有理数集合，当你把它们加起来时，结果不是一个有理数！下面是一个例子：

$$\pi = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \cdots$$

这个序列的每个项显然都是一个有理数。如果你依次算出前两项、前三项、前四项的结果，很快你会得到 4.0，2.666…，3.466 6…，2.895 2…，3.339 6…，在 100 000 项之后，大约是 3.141 58。如果你继续进行下去，它显然会汇聚在某个特定的值上。但是，没有有理数的有限序列会完全与这个限制序列相同。这是一个限制数列，它显然是一个数；不管我们做什么，它绝不会完全等于一个有理数。它总是位于我们可以选择的两个有理数之间。

实数是整数、有理数以及那些与有理数之间的间隙相匹配的奇怪数字。

3.2 实数的公理化定义

公理化的定义有多种方法，与数轴的定义类似，但是，公理化定义更加正式。公理化的定义不会告诉你怎么去获取实数，它只用一些建立在简单集合论和逻辑论基础上的规则来描述实数。

当我们利用一组相关组件来定义实数这样的事物时，数学家喜欢说他们定义的是一个对象。所以，我们将实数定义为一个多元组。构建一个多元组没有很深的含义，它只是一个收集组件到一个对象的方法。

实数由一个五元组（**R**，+，0，×，1，≤）定义，其中，**R** 是一个无限的集合；“+”和“×”是对 **R** 中元素的二元运算，“0”和“1”是 **R** 中特别重要的元素，“≤”是 **R** 中元素的二元关系。

多元组的元素必须满足一组公理，称作域公理。实数是域这种数学结构的一个典型例子。域作为一种基础结构，在数学王国被广泛使用；你需要了解代数，才能了解域这种结构的基础。我们通常使用一个域公理集合来定义域。域公理集合比较耸人听闻，因此，我们不是一次把这些公理都列出来，而是在后面的小节逐个解释它们。

域公理第一部分：加法和乘法

我们先从最基础的公理开始。实数（所有值域）有两种主要

的运算：加法和乘法。这两种运算需要在某种方式下合作。

（**R**，＋，×）是一个域，这句话包括下面几点含义：

- 在 **R** 上＋、×是封闭的、完全的、自映射的。**封闭**的意思是：对于任意一对实数 r 和 s，如果你将它们相加、相乘，那么 $r+s$ 和 $r\times s$ 还是实数。**完全**的意思是：对于任意一对实数 r 和 s，你都能做加法 $r+s$ 或者乘法 $r\times s$。（可能这听起来很愚蠢，但是请记住：我们将很快介绍除法，而且对于除法来说，这条就不是真的，因为你不能除以零。）**自映射**的意思是：如果你有一个实数 x，总能找到一对实数 r 和 s 或者 t 和 u，使得等式 $r+s=x$ 和 $t\times u=x$ 成立。
- “＋”和“×”满足交换律：$a+b=b+a$，$a\times b=b\times a$。
- “×”对于每个“＋”满足分配律。意思是 $(3+4)\times 5=3\times 5+4\times 5$。
- 对于“＋”运算，0 是唯一的恒等值。对所有的 a，$a+0=a$。
- 对于 **R** 里面的每一个数 x，**有且只有**一个数 $-x$，称作 x 的**加法逆元**，满足 $x+(-x)=0$，并且对于所有 $x\neq 0$，$x\neq -x$。
- 对于“×”运算，1 是唯一的恒等值。对所有的 a，$a\times 1=a$。
- 除了 0 以外的任意实数，有且只有一个实数 x^{-1}，称作 x 的乘法逆元，满足 $x\times x^{-1}=1$，并且除非 $x=1$，否则 x 和 x^{-1} 不会相等。

如果将这些都翻译成通俗语言，你会发现它们并没有很难理解的地方。这些只是说了加法和乘法应该遵循的规则，而这些规则我们在学校早已经学过了。区别在于，在学校时，我们学的是实数如何运算，现在我们将这些作为公理化的需求。实数之所以称为实数，是因为它们按照上面的要求工作。

域公理第二部分：顺序

这个公理是说明这样一个事实：实数是有序的。从根本上来说，这是一种正式说法：有两个实数，其中一个小于另外一个，除非它们相等。

- （**R**，$\leqslant$）是全序：
  1. 对于所有的实数 a 和 b，要么 $a\leqslant b$，要么 $b\leqslant a$（或者两者都成立，记 $a=b$）。
  2. “$\leqslant$”具有传递性，即如果有 $a\leqslant b$ 和 $b\leqslant c$ 成立，那么有 $a\leqslant c$ 成立。
  3. “$\leqslant$”不具有对称性，即如果 $a\leqslant b$ 并且 $a\neq b$，那么 $b\leqslant a$ 不成立。
- “$\leqslant$”与“$+$”和“$\times$”是相兼容的：
  1. 如果有 $x\leqslant y$ 成立，那么 $x+1\leqslant y+1$ 成立。
  2. 如果有 $x\leqslant y$ 成立，那么对于所有 $0\leqslant z$，$(x\times z)\leqslant(y\times z)$ 成立。
  3. 如果有 $x\leqslant y$ 成立，那么对于所有 $z\leqslant 0$，$(y\times z)\leqslant(x\times z)$ 成立。

域公理第三部分：连续性

现在，我们开始介绍最难理解的一个公理。实数有一个比较难理解的地方就是它是连续的，意思是说，给定任意两个实数，在它们中间都有无限个数。并且在这个无限的实数集合里，全序

仍然成立。为了描述这一点，我们不得不介绍一个概念——上界：

- 对于 **R** 的任意非空子集 S，如果 S 有一个上界，那么它就有一个**最小上界** l。因此，对于任意实数 x，如果它是集合 S 的上界，那么有 $l \leqslant x$ 成立。

这里真正想要说的是：如果你选了一堆实数组成一个集合，不管它们之间相隔多么接近，或者多么遥远，总存在一个最小的数，大于所有集合里面的数。

其实，这是实数公理化定义的简要版本。它描述了实数应有的性质，而且通过一种形式的、逻辑的陈述来表述。符合这个描述的值的集合，统称为这个定义的模型，可以找到很多符合这个定义的模型，所有符合该定义的模型都是等价的。

3.3 实数的构造性定义

构造性定义是一个创造实数集合的过程。我们可以把实数理解为多个不同集合的并。

首先，考虑整数。所有的整数都是实数，具有与整数完全一样的性质。

然后，再添加一些小数，正式地称之为有理数。一个有理数是通过一对非零整数定义的，称为比值。比值 n/d 代表了一个实数，并且当它乘以 d 时，将得到结果 n。通过这种方式构建的数会有很多相等的值，比如 1/2，2/4，3/6 等。就像我们在定义整数时所做的一样，我们将定义这些有理数是它们比值的等价类。

在定义有理数的等价类之前，我们需要先定义另外几件事物。

1. 如果 (a/b) 和 (c/d) 是有理数，那么 $(a/b)\times(c/d)=$

$(a\times c)/(b\times d)$。

2. 对于除了0以外的任意有理数，总存在另外一个有理数，称作它的乘法逆元。如果 a/b 是一个有理数，那么它的乘法逆元 $(a/b)^{-1}$ 就是（b/a）。因此对于任意的两个有理数 x 和 y，如果 $y=x^{-1}$（即如果 y 是 x 的乘法逆元），那么有 $x\times y=1$ 成立。

可以利用乘法逆元来进一步定义比值等价的含义。如果有 $(a/b)\times(c/d)^{-1}=1$ 成立，两个比值 a/b 和 c/d 是等价的，即第一个比值乘以第二个比值的乘法逆元等于1。这些比值的等价类都是有理数，而每个有理数也是实数。

这为我们提供了有理数的完备集，为了方便，我们使用 **Q** 来代表有理数集合。现在我们有点被困住了。我们知道了有理数的存在，可以利用公理定义它们，并且它们能满足实数的公理条件。但是我们需要能够构建出它们，用什么方法？

数学家提出了各式各样的方法来构建实数。我将要使用的方法称为狄德金分割（Dedekind cut）法。狄德金分割是数学方法，它能通过一对集合（A，B）来表示一个实数 r：A 是小于实数 r 的有理数集合；B 是大于实数 r 的有理数集合。由于有理数的属性，这两个集合都有很特殊的属性。集合 A 包含了小于 r 的数，但是集合 A 中不存在最大数；类似地，集合 B 中没有最小的数。r 是这两个集合之间的数，称之为分割。

如何获得无理数呢？这里有一个简单的例子：利用狄德金分割定义2的平方根：

$$A=\{r:r\times r<2 \quad 或者\ r<0\}$$

$$B=\{r:r\times r>2 \quad 并且\ r>0\}$$

利用狄德金分割，我们可以非常容易地构造性定义实数。实

数的集合就是这样的一个集合，即实数可以通过有理数的狄德金分割来定义。

我们知道加法、乘法和比较操作都能很好地运用在有理数上，它们形成了一个域，它们是全序的。这里仅仅是为了给你一个感觉——可以将分割用于这些操作。我们将介绍一个利用分割来定义加法、相等和有序的示例。

- **加法**：对于分割 $X=(X_L, X_R)$ 和 $Y=(Y_L, Y_R)$，有 $Z=X+Y=(Z_L, Z_R)$。其中，$Z_L=\{x+y$：x 属于 X_L，y 属于 $Y_L\}$，$Z_R=\{x+y$：x 属于 X_R，y 属于 $Y_R\}$。
- **相等**：两个分割 $X=(X_L, X_R)$ 和 $Y=(Y_L, Y_R)$ 是相等的，当且仅当 X_L 与 Y_L 相等，并且 X_R 与 Y_R 也相等。
- **有序**：如果有两个分割 $X=(X_L, X_R)$ 和 $Y=(Y_L, Y_R)$，X 小于或等于 Y，当且仅当 X_L 是 Y_L 的一个子集，并且 Y_R 是 X_R 的一个子集。

现在我们定义了实数，并且演示了如何构建好的实数模型。我们到达了一个里程碑：我们已经知道了最熟悉的数，并且知道了它们是怎样工作的。这是不是说我们已经对数了如指掌了呢？事实上不是。数字依然还是深藏不露，我们只是知道了冰山一角。后面章节我们将要介绍什么呢？事实上我们不能写出大部分数。大部分数都一直延伸到无穷，我们没有办法把它们写下来。事实上，我们甚至没有办法给它们命名。我们不能写一个计算机程序来找到它们。它们是真实存在的，但是我们没有办法指出它们、叫出它们的名字或者分别描述它们。下一章我们将介绍这样一类数——无理数，它们就是上述令人不爽的根源。