第 1 章损 失 分 布

【内容要点】

1. 风险与损失的基本概念

（1） 风险的定义： 在一定条件下，在特定的期间内，某一事件的实际结果与预期结果的差异就是风险。风险（X-EX）是一个随机变量。

（2） 风险的特征： 客观性、普遍性、社会性、不确定性、发展性。

（3） 在非寿险经营中，对风险的分类如下：

按照风险的性质： 可以分为纯粹风险和投机风险。

按可保风险的要求： 非投机风险； 损失不能太小； 非巨灾性； 随机性； 可统计性。

按照经营活动的内容： 可以分为商品经营风险和资产经营风险。

按照风险波及的范围： 可以分为基本风险和特殊风险。

按照风险的形态： 可以分为潜在风险和意外风险。

按照风险发生的地点： 可以分为经营内部风险和经营外部风险。

（4） 风险的度量方法（详见重难点解析）

最基本的方法——波动性方法。

VaR 方法。

实务常用的监管方法——RBC 方法。

（5） 损失、索赔、赔款三者之间的关系如下：

损失，指的是保险标的在保险事故中遭到的实际损失额。

索赔，是保单持有人向保险公司提出的赔偿要求。不考虑道德风险要素时，索赔额基本等同于损失额。

赔款额，与保险标的的实际损失相关，但由于保险公司在理赔时还要考虑保险金额（赔款限额）、免赔额和承保比例等诸多因素，一般来说赔款不会超过损失额。

未加特殊说明时，不严格区分一个分布究竟是损失分布、索赔额分布还是赔款额分布。

2. 一般的随机变量的分布及其数字特征

（1） 随机变量的分布及其数字特征列表（见表 1　1）

表 1　1

连续型随机变量 X

离散型随机变量

分布函数

F（x）=p（X≤x）

F（x）=∫x-∞f（x）dx

$F(x)=\sum_{X_i\leqslant x} p(x_i)$

分布密度函数/分布列

$f(x)\geqslant 0$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$

$p(x_i)=P(X=x_i)\geqslant 0$，$i=1, 2, \cdots$

$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i)=1$

数学期望 E（X）

$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

$\sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$

方差

Var（X）

$\int_{-\infty}^{+\infty}[X-E(X)]^2 f(x)dx$

$\sum_{i=1}^{\infty}[x_i-E(X)]^2 p(x_i)$

数学期望与

方差的性质

$Var(X)=E[X-E(X)]^2$

（1） $E(kX)=kE(X)$

（2） $E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$

（3） 若 X 与 Y 相互独立，则 $E(XY)=E(X)E(Y)$

（4） $Var(kX)=k^2Var(X)$

（5） $Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

（6） 若 X 与 Y 相互独立，则

$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)$

变异系数

Var（X） E（X）

k 阶原点矩

$\mu_k=E(X^k)$

k 阶中心矩
vk=E［X-E（X）］k
偏度（X 的三阶矩存在时）
β1=E（X-EX）3［E（X-EX）2］32=v3（v2）
32

峰度（X 的四阶矩存在时）
β2=E（X-EX）4［E（X-EX）2］2-3=
v4（v2）2-3

中位数 x0.5

F（x0.5）=∫x0.5-∞f（x）dx=0.5
—
众数 mod（X）
使密度函数 f（x）达到最大的值
使概率 P（X=x）达到最大的值

（2） 财务稳定性系数 K

K=QP
，其中 Q 是赔付随机变量的标准差； P 是所收的纯保费（一般是
E（X））。假如损失变量服从二项分布，K 为：

K=QP
=anp（1-p）
anq=
p（1-p）nq

这里 n 为独立的风险单位个数，
a 为每个单位的保额，p 为损失概率，q 为纯费率。
假定保险公司有 k 类业务，整个公司度量经营风险的财务稳定性系数

K=∑ni=1［a2inipi（1-pi）］
∑ni=1
［ainipi］i=1，2，…，k

k 与 q，n 成反比，与 p 成正比。其中 ai 为第 i 类业务的风险保额。
3. 连续型随机变量与损失额的分布
非寿险精算中的损失额 X 一般用非负连续型随机变量来表现。
常见连续型分布的知识要点如下表。读者应该对下表中的分布熟练掌握。

表 1　2 常见连续型分布

密 度 函 数
期望 E（X）
方差 Var（X）
备注

正态分布

X～N（μ， σ2）

x∈R

f（x）=12πσe-（x-μ）22σ2
μ
σ2
关于直线 x=μ 对称

若 X～N（μ，σ2），则 Z=X-μσ～N（0，1）称为标准正态分布： ф（-x）= ф（x），Φ（-x）=1-Φ（x）
对数正态分布

X～ln（μ， σ2）

x>0
f（x）=12πσxe-（ln x-μ）22σ2
eμ+σ22
e（2μ+σ2）（eσ2-1）
汽车保险、工程保险、火灾损失保险等

帕雷托

分布

x>0

简单参数
f（x）=α β βxα+1x>β

0x≤β

α>1 时，存在
E（X）=α β α-1
α>2 时，存在
Var（X）=α β2α-2α β α-12

一般帕雷托
f（x）=α β α （β+x） α+1
α>1 时，存在

E（X）=β α-1
当α>2 时，存

在 Var（X）=

α β2（α-2）（α-1）2

广义帕雷托
f（x）=Γ（α+k） β αxk-1Γ（α）Γ（k）
（β+x） α+k
α>1 时，存在

E（X）=βkα-1
当α>2 时，存

在 Var（X）=

（α+k-1）kβ2（α-2）（α-1）2
右偏斜。尾部趋于零的速度要比对数正态分布慢得多，多用来估计特大赔付
续表

密 度 函 数
期望 E（X）
方差 Var（X）
备注

伽玛分布

X～Γ（α，β）

x>0
f（x）=βαΓ（α）e-βxxα-1

α，β>0
αβ
αβ2
偏度系数β1=2α，变异系数 k=1α

α=1 时，是指数分布
对数伽玛分布 ln X～Γ（α，β）
f（x）=βα（ln x）α-1Γ（α）xβ+1
ββ-1α
ββ-2α-

ββ-12α

韦伯分布
f（x）=cγxγ-1e-cxγ x>0
Γ1+1γc
1γ
Γ1+2γc
2γ-

Γ1+1γc1γ2
γ=1 时，是指数分布
χ2 分布
f（x）=12n2Γn2xn2e-12x

x>0
n
2n
χ2（n）=Γn2，12

常见分布的衍生分布在表 1 3 列出。对于这类分布，读者应该重点了解其是如何派生出来的，不必强行记忆。

表 1 3

密度函数与
分布函数
期望 E（X）
方差 Var（X）
备注

变换伽玛分布
f（x）= τ e-xx α 2a Γ （ α ）

G（x；　α ，　θ ，　τ ）= ∫ x θ　τ 0e-tt α -1dt Γ （ α ）

其中 u=x θ　τ ，　0<x<∞，　α >0，　θ >0，　τ >0
θ Γ α +1 τ Γ （ α ）
θ 2Γα+2τ
Γ （ α ）-
θ Γ α +1 τ Γ （ α ）2
τ =1 时，是伽玛分布

τ =1，　α =1 时，是指数分布

α =1 时，是韦伯分布
续表

密度函数与
分布函数
期望 E（X）
方差 Var（X）
备注

逆变
换伽
玛
分布
f（x）= τ e-uu α x Γ （ α ）

G（x；　α ，　θ ，　τ ）=1- ∫ u0e-tt α -1dt
Γ （ α ）

其中 u= θ x τ

0<x<∞，　α >0，　θ >0，　τ >0
θ Γ α -1 τ Γ （ α ）

θ2Γα-2τΓ（α）-

θΓα-1τΓ（α）2

变换贝塔分布
f（x）=Γ（α+b）Γ（α）Γ（b）

xθγaγ
x1+xθγa+b

F（x; a，b，γ，θ）=

Γ（α+b）∫xθγ0
ta-1
（t+1）a+be-tdtΓ（α）Γ（b）

0<x<∞，a，b，θ，γ>0
θΓα+1γΓb-1γΓ（α）Γ（b）
θ2Γα+2γ
Γ
b-2γΓ（α）Γ（b）
-

θΓα+1γ
Γb-1γΓ（α）Γ（b）2
a=1 时，是 Burr 分布

a=1，γ=1 时，帕雷托分布

a=1，b=1 时，对数分布
逆高
斯
分布
f（x）=θ2πx312

exp-θ2xx-μμ2

0<x<∞
μ
μ3θθ>0

4. 离散型随机变量与损失次数的分布
非寿险精算中的赔款次数 N 是个取值为非负整数的离散型随机变量。常见离散型分布的知

识要点如下表。读者应该对下表中的分布熟练掌握。

表 1　4

分布列
期望 E（X）
方差 Var（X）
备注

泊松

分布
P（X=k）=λke-λk!

（λ>0，k=0，1，2，…，n）
λ
λ
常用来描述小概率发生的次数；　非寿险精算数学中最常用的分布；

泊松分布具有可加性
续表

分布列
期望 E（X）
方差 Var（X）
备注

二项

分布
P（X=k）=Cknpk（1-p）n-k

（k=0，1，2，…，n）
np
np（1-p）
计算时常用两种近似方法：　泊松分布近似，利用中心极限定理
几何

分布
P（X=k）=p（1-p）k-1

（0＜p＜1，k=1，2，…，n）

（x=0，1，2，…）
1-pp
1-pp2
是伯努利试验中首次成功前，失败次数的分布
负二

项分

布
P（X=k）=Crr+k-1pr（1-p）k-r

（r≥1，0＜p＜1，k=r，r+1，…）
r•（1-p）p
r（1-p）p2
灾害事故和发病情形的统计问题，在风险不同质情况下赔款发生次数的分布；

当 r＝1 时的负二项分布就是几何分布

【本章重难点解析】
这一章介绍了非寿险中风险、损失、损失额分布和损失次数分布的基本知识，这些大都是最基础的概率论知识及其应用。如果读者已经学习过概率论，那么对这一章的把握将不会十分困难。
本章的重点是精算数学的常用分布及其特征，包括损失额分布（特别是正态分布、对数正态分布、一般帕雷托分布、伽玛分布、韦伯分布
和 x 2 分布）和损失次数分布（特别是泊松分布、二项分布和负二项分布）。要求读者对以上分布掌握熟练。
本章的难点并不突出，但仍然需要注意的一些具有保险行业特色的运用。下面将具体分别加以说明。
1. 风险的度量方法
（1） 对 VaR 的补充说明
记 X 为某期间的最大损失，分布函数为 F（x），其反函数为 F-1（x），置信水平为 c（取 95％~99％）对于在险值 VaR，满足
P（X>VaR）=1-c
即，P（X≤VaR）=c，F（VaR）=c
所以 VaR=F-1（c），即 VaR 是 X 分布的 c 分位数。
（2） RBC 方法的补充说明
RBC 方法是美国保险监督官协会（NAIC）引进的实务操作方法，用于评估保险公司资本和盈余的充足性。非寿险公司的 RBC 方法有一套完整而复杂的计算公式，读者只需掌握以下两点
最低风险资本＝R21+R22+R23+R4
风险资本（RBC）比率=

总调整资本最低风险资本
×100%

其中，R1—资产风险，R2—信用风险，R3—承保风险，R4—资产负债表外风险。
总调整资本＝公司资本金-特定赔款准备金
注： Ri 一般由更具体的公式给出。如资产风险 R1 通常由固定收益债券和短期投资等乘以规定的风险因子计算，承保风险 R3 通常根据公司的平均赔付率和市场赔付率确定。
2. 财务稳定系数 K
【例 1.1】某公司承保业务如
表 1 5 所示，为保证保单组合的财务稳定系数
K=0.1，问再保险的自留额 x 应定为多少？

表 1 5

类别	承保单位数量 ni	单位保额 ai	损失概率 pi
一	6000	5000	2%
二	1000	30000	2%
三	300	100000	2%

解这里给出另一种做法。
根据 K=QP=anp（1-p）anq=p（1-p）nq，和 K1+2+…+n=∑ni=1a2inipi（1-pi）∑ni=1ainipi
易求 K1=0.09，K1+2=0.12，K1+2+3=0.16
因为要求的财务稳定系数 K=0.1，K1<K<K1+2<K1+3
所以再保险的自留额 30000>x>5000。
即第二、第三类业务都必须分保，将第二类和第三类保单看作同一种业务，利用

K*=Q2+x2np（1-p）P+xnp

其中，Q 为第一类业务赔付的标准差： Q2=50002×6000×0.02×0.98=2940000000
P 为第一类业务赔付的纯保费： P=5000×6000×0.02=60000
0.1=2940000000+x2×1300×0.02×0.98
60000+x×1300×0.02
解得： x=18565.68 或-1899.01（舍去）
自留额应该定为 19000 元。
所以，韩天雄主编的考试教材中使用的计算方法是一种近似计算。当要求的财务稳定系数 K（本题 0.1）非常接近的一类保单的 K1（本题 0.09）时，这种近似计算的精确度较高。
3. 对数正态分布
【例 1.2】某保险公司承保的工程险损失额 X，已知 ln（X）~N（2，6）。若定义保费为平均损失额加上“安全附加费用”，此“安全附加费用”是损失额标准差的 1/100。求此类保单的单位保费。
解 X 的期望由 eμ+σ22=e2+62=148.4
X 的方差为 e（2μ+σ2）（eσ2-1）=e
（2×2+6）（e6-1）=8864084.1
X 的标准差为 8864084.1=2977.3
保费为 148.4+2977.3/100=178.2
帕雷托分布、伽玛分布（包括指数分布）也是考察的重点，更多的分析见习题解答。
4. 自留额与限额损失再保险的应用
对单位保单的损失额 X 而言，若规定免赔额为 d，未加特殊说明时，认为单位保单的赔付额为 Id（X），Id（X）=X-d，X>d

0，其他
单位保单的期望赔付为

E（Id）=∫∞d（x-d）f（x）dx
=E（X）-d+∫d0（d-x）f（x）dx

=∫∞d［1-F（x）］dx
=E（X）-∫d0［1-F（x）］dx

需要注意的是：
（1） 以上的 4 种表达式都非常有用，如果在解题时能灵活运用，可以在很大程度上简化计算。
（2） 若 X 是离散型变量，则“∫”变成“∑”，f（x）表示 X 的
概率密度函数。如
E（Id）=∑x=d（x-d）f（x）。
离散型的 E（Id）还有递推式： E（Id+1）=E（Id）-［1-F（d）］

对总损失 S 而言，自留额为 d 的限额损失再保险性质同上。但再限额损失再保险中，Id（S）代表着再保险的纯保费。

相关习题详见习题解答中的 T14，T15，T16，T17。

5. 损失次数的分布

【例 1.3】某类保单中，每一风险单位在一年内发生索赔的次数 X 服从参数为 0.01 的泊松分布。已知公司承保了 30 个风险单位。问在三年内这批保单不发生索赔的概率。

解从题意可知，30 个风险单位独立同分布，根据泊松分布的可加性，这批保单在三年内发生索赔的次数 S 服从泊松分布。

参数 $\lambda=0.01\times30\times3=0.9$

所以三年内不发生索赔的次数的概率为 P（S=0）=e- λ =e-0.9=0.4066

二项分布、负二项分布（包括几何分布）也是考察的重点，更多的分析见习题解答。

6. 负二项分布在非同质保单中的应用

韩天雄主编的教材 1.4.3 中已证明“索赔次数 N 服从参数为Λ的泊松分布，若Λ是服从Γ（α，β）的随机变量，则 N 服从 k=α， p=β β+1 的负二项分布。” 这是一个重要的结论，不仅在实务中运用广泛，在解题中也经常遇到。相关习题详见习题解答

中的 T10，T11。

7. 关于有免赔额时的赔付随机变量的说明及解释

已知某类风险单位的损失 X，其分布函数为 FX（x），密度函数为 fX（x）。此类保单规定免赔额为 d。下面分别讨论两个极易混淆的变量。

（1） 显然具有免赔额 d 时的赔付额随机变量 Y 为

Y=X-d，X>d

0，其他

由全概率法则可知 Y 的分布函数为

F（y）=P（Y≤y）

=P（X-d≤y|X>d）P（X>d）+P（0≤y|X≤d）P（X≤d）

=P［（X-d≤y）∩（X>d）］+P（X≤d）

=P（d<X≤d+y）+P（X≤d）

=F（d+y）-F（d）+P（X≤d）

=F（d+y）

再求密度函数，对上式中的 y 求导可得

fY（y）=fX（d+y）

（2） 在具有免赔额 d 时保险公司实际发生赔付额随机变量若设为 Y，则 Y 为

Y=X-d|X>d

先求其分布函数，如下：
y≤0 时，显然 FY（y）=0
y>0 时，显然 X>d

FY（y）=P（Y≤y|X>d）
=P（X-d≤y|X>d）

=P（d<X≤y+d|X>d）
=FX（y+d）-FX（d）
1-FX（d）

综合得

FY（y）=

FX（y+d）-FX（d）
1-FX（d），y>0

0，
y≤0

再求密度函数，对上式中 y 求导可得

fY（y）=

fX（y+d）
1-FX（d），y>0

0，y≤0

显然（1）中的 Y 不等于（2）中的 Y，从统计的角度来看，其区别在于定义（2）中的 Y 时，样本总体缩小了。更深入的讨论见例 1.4 和习题 T14。

【例 1.4】当此知识点中的 X～U（0，100）且 d＝20 时，求以上讨论的两种 Y 的密度函数？

解第一种 Y 的密度函数为

f（y）=d+y100′ =1100，0<y≤80

f（y）=P（X<20）=0.2，y=0

这显然是一个混合分布。

第二种 Y 的密度函数为

fY（y）=fX（y+d）1-FX（d）

=11001-d100=1100-d

=1100-20=180， 0≤y≤80

注： 在再保险与生存模型有关应用中，第二种随机变量 Y 大有用武之地。再保险中再保险人赔付随机变量就是第二种 Y； 生存模型中人的余命随机变量 T（0）与 T（x）的关系就是上述例 1.4 中随机变量 X 与第二种随机变量 Y 的关系。T（0）与 T（x）分别代表 0 岁的人的余命随机变量与 x 岁的人的余命随机变量。

【习题解答】

1. 下列数据为一保险公司有效保单在 1999 年 7 月的所有发生赔款的金额（单位： 元）

250，280，50，314，250，90，450，180，150，250，

309，2100，206，150，146，220，300，50，220，688

计算样本均值及标准差。

解这道题是考察对样本均值和方差的数理统计基础，

根据=1n∑ni=1Xi，S2=1n∑ni=1（Xi-）2

将题中 20 个数据带入，即可解出

＝332.65； S＝428.59

2. 已知∫∞0e-xxndx=n!（n 为非负整数）

（a） 求证 f（x）=e-xxr/r!（x≥0）为一概率密度函数；